



Comportement mécanique des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales : développement d'un modèle analytique adapté

Sébastien Durif

► To cite this version:

Sébastien Durif. Comportement mécanique des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales : développement d'un modèle analytique adapté. Autre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2012. Français. NNT : 2012CLF22289 . tel-00872126

HAL Id: tel-00872126

<https://theses.hal.science/tel-00872126>

Submitted on 11 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U : 2289

EDSPIC : 583

UNIVERSITE BLAISE PASCAL – CLERMONT II
ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT-FERRAND

THESE

présentée par

Sébastien DURIF

Master 2R « innovation-mécanisme-matériaux-structure » (Université Blaise Pascal, Clermont)
Ingénieur de Polytech'Savoie (Chambéry)

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

SPECIALITE : Génie Civil

**Comportement mécanique des poutres cellulaires à ouvertures
sinusoïdales
-développement d'un modèle analytique adapté-**

Soutenue publiquement à Clermont-Ferrand le 08 novembre 2012 devant le jury :

M.	Dinar CAMOTIM	Professeur, Université de Lisbonne (Portugal)	Rapporteur
M.	Abdelouahab KHELIL	Professeur, Université de Lorraine, Nancy	Rapporteur
Mme	Ulrike KUHLMANN	Professeur, Université de Stuttgart (Allemagne)	Rapporteur
M.	Jan BUJNAK	Docteur, Groupe Peikko, Zilina (Slovaquie)	Examineur
M.	Alain BUREAU	Ingénieur, CTICM	Examineur
M.	Emmanuel FERRIER	Professeur, Université Claude Bernard, Lyon 1	Examineur
M.	Jean-Pierre MUZEAU	Professeur Honoraire, Université Blaise Pascal	Examineur
M.	Olivier VASSART	Docteur, Arcelor Mittal, Luxembourg	Examineur
M.	Abdelhamid BOUCHAÏR	Professeur, Université Blaise Pascal	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Cette thèse s'est déroulée au sein du laboratoire Institut Pascal (anciennement LaMi) de l'Université Blaise Pascal.

Je remercie le prof. Jean Pierre MUZEAU qui m'a initié à la construction métallique et m'a permis de continuer mes études en thèse de doctorat.

Je remercie le Prof. Abdelhamid BOUCHAIR pour son encadrement, sa rigueur et son investissement qui m'auront permis d'aller au bout de ce travail.

Aussi je tiens à remercier l'entreprise ArcelorMittal et particulièrement Olivier VASSART pour le financement des études expérimentales et son soutien. Je suis reconnaissant au CTICM pour l'aide apportée à la préparation des essais et particulièrement à Alain BUREAU pour ses conseils avisés.

Je remercie tous mes collègues de travail au sein du laboratoire et particulièrement ceux au sein de l'école de Polytech'Clermont-Ferrand qui m'ont apporté leur aide et leur encouragement tout au long de cette thèse.

Je remercie mes amis pour leur soutien et présence lorsque j'en avais besoin.

Je termine ces remerciements avec une pensée pour ma famille qui m'aura apporté tout au long de cette thèse, confiance, amour et encouragement. Je remercie tout particulièrement Roland GOURVES sans qui je n'aurais sans doute pas fait ce chemin et ma mère qui, par sa constante implication dans mon éducation, m'aura donné la force d'aller au bout de ce travail. Enfin, une pensée particulière pour Aurélie qui m'a accompagné durant ces trois années et m'a donné la joie d'être le père d'une jolie petite fille.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to develop an analytical approach so as to define the ultimate failure load of cellular beams with sinusoidal openings. Indeed, the evolution of the conception techniques led to the development of a new opening shape for cellular beams: the sinusoidal openings (Angelina™ beam). This new opening shape involves new failure modes at ultimate limit state and cannot be calculated with existing methods. Thus, experimental tests have been carried out on full scale cellular beams with sinusoidal openings ($\approx 10\text{m}$ span).

It has been shown, through those experimental studies led on three beam configurations, that the main failure mode is linked to the Vierendeel mechanism. At ultimate limit state, the local bending of the members of the most stressed opening leads to either the formation of four plastic hinges or the local buckling of the compressed opening web panels. A finite element model has been developed on the software SAFIR in order to better understand the different observed failure modes. This model has been validated on the basis of the experimental results and allowed identifying two main points: firstly, the existence of a rotational restraint between the intermediate web-post and the opening web panel and secondly, the failure of the sinusoidal opening corresponds to a mechanism combining the failure of each opening quarters.

A second experimental and numerical test campaign has been conducted on isolated parts of the previous tested beams, in order to study locally the behavior of the opening quarters under local bending. Those studies allowed validating a finite element model developed on Cast3m software. This model has been used for a parametrical study which allowed quantifying the rotational restraint supplied by the intermediate web-post on the adjacent opening panel. This study confirmed the importance of the stiffness supplied by the intermediate web-post to the opening panels. Thus, it has to be taken into account to get a representative analytical failure load of each opening quarter.

Finally, this thesis led to the development of a new analytical model for the calculation of the ultimate strength of the different opening parts. Due to the possible local buckling, the model is based on theoretical elements on the stability of plates. Furthermore, a detailed numerical study of the mechanism of failure of an isolated opening allowed justifying a cinematic approach for the failure of the opening. This approach combines the ultimate strength of each opening parts. The proposed analytical model permits to consider each opening quarter failure mode and strength. A comparative study with finite element results has showed that this model is reliable and representative of reality for defining the ultimate limit state of cellular beams with sinusoidal openings.

Keywords: Cellular beams, sinusoidal openings, experimental tests, numerical studies, Vierendeel mechanism, local buckling, analytical model.

RESUME

L'objectif de ce travail de thèse est de développer une approche analytique permettant de définir la charge ultime d'une poutre cellulaire à ouvertures sinusoïdales. En effet, l'évolution des techniques de production a permis le développement d'une nouvelle forme de poutre cellulaire munie d'ouvertures sinusoïdales : la poutre AngelinaTM. Cette nouvelle forme d'ouverture implique de nouveaux modes de ruine. De ce fait, en vue de développer un modèle de calcul analytique adapté à cette nouvelle forme d'ouverture, une campagne d'essais expérimentaux a été menée sur des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales à grande échelle ($\approx 10\text{m}$).

Au travers de ces études expérimentales sur trois configurations de poutre, nous avons montré que le principal mode de ruine est lié à la flexion Vierendeel. En effet, la flexion locale des membrures de l'ouverture la plus sollicitée engendre soit la formation de 4 rotules plastiques aux 4 coins de l'ouverture, soit l'instabilité locale des parois d'âme comprimées. Un modèle aux éléments finis a été développé sur le logiciel SAFIR afin d'analyser les différents modes de ruines observés. Ce modèle a été validé sur la base des résultats expérimentaux et nous a permis d'identifier deux points particuliers : d'une part l'existence d'un maintien rotationnel entre le montant intermédiaire et la paroi d'ouverture et d'autre part, la ruine de l'ouverture ne se produit qu'au travers d'un mécanisme combinant les ruines des différents quarts d'ouverture.

Une seconde campagne d'études expérimentales et numériques a ensuite été menée sur des parties isolées, extraites des poutres préalablement testées, afin d'étudier de manière locale le comportement à la flexion des quarts d'ouverture. Ces études ont servi à valider un second modèle aux éléments finis, développé sur le logiciel Cast3m. Celui-ci nous a permis, au travers d'une étude paramétrique, de quantifier le maintien rotationnel apporté par le montant intermédiaire sur la paroi d'âme d'ouverture adjacente. Cette étude a confirmé l'importance de la rigidité apportée par le montant intermédiaire aux parois d'âme adjacente. Ainsi, cet apport de rigidité doit être pris en compte dans l'approche analytique pour définir de manière réaliste la résistance au voilement local des différentes parties d'une ouverture sinusoïdale.

Finalement, cette thèse a abouti au développement d'un nouveau modèle analytique de calcul de la résistance ultime des parois d'une ouverture sinusoïdale. Du fait des éventuelles instabilités locales, le modèle analytique s'est appuyé sur des éléments théoriques de stabilité des plaques. De plus, une étude numérique détaillée du mécanisme de ruine d'une ouverture isolée nous a permis de justifier une approche cinématique de ruine de l'ouverture sinusoïdale. Cette approche combine les résistances ultimes des différents quarts d'ouverture. Le modèle analytique proposé permet de considérer à la fois la résistance ultime de chaque partie de l'ouverture et leurs modes de ruine. Une étude comparative avec des résultats numériques a montré que ce modèle est fiable et représentatif de la réalité pour caractériser l'état limite ultime des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales.

Mots clefs : Poutres cellulaires, ouvertures sinusoïdales, essais expérimentaux, études numériques, flexion Vierendeel, voilement local, modèle analytique.

TABLE DES MATIERES

PARTIE I	- Etat de l'art -	11
1.	Introduction	12
2.	Bilan des premières études menées sur les poutres alvéolaires	13
3.	Comportement des poutres à large ouverture isolée	16
3.1.	Introduction	16
3.2.	Vérifications des résistances globales	17
3.3.	Vérifications des résistances locales	20
4.	Poutres à ouvertures multiples	25
4.1.	Etudes expérimentales et numériques des poutres cellulaires	27
4.2.	Poutre cellulaire représentée par une poutre échelle	28
4.3.	Stabilité élastique globale des poutres alvéolaires	30
4.4.	Flexion Vierendeel	31
4.5.	Résistance au cisaillement du montant	33
4.6.	Flambement du montant [BIT, 06]	34
5.	Poutre à ouverture d'âme en construction mixte	36
5.1.	Introduction [BIT, 01] [CHU, 01-2]	36
5.2.	Résistance au cisaillement	38
5.3.	Action mixte locale	39
5.4.	Effets du second ordre	41
5.5.	Résistance à la flexion Vierendeel totale	42
6.	Poutre Angelina™	43
6.1.	Introduction	43
6.2.	Comportement mécanique	44
6.3.	Classification des sections transversales	46
6.4.	Interaction plastique M-N d'une section en Té	50
7.	Conclusion	51
PARTIE II	- Etude comportementale des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales -	52
1.	Etudes expérimentales des poutres à ouvertures sinusoïdales	53
1.1.	Introduction	53
1.2.	Programme expérimental	54
1.3.	Modèle numérique	66
1.4.	Résultats numériques et comparaison avec les essais	67
1.5.	Bilan	79
2.	Etude numérique des poutres à ouverture sinusoïdales	81
2.1.	Ordre de grandeur des écarts MEF/Théorie	81
2.2.	Etude numérique détaillée	84
3.	Conclusion	100
PARTIE III	- Etudes de montants isolés et analyse de la connexion montant/quart d'ouverture -	103
1.	Introduction	104
2.	Programme expérimental	105
2.1.	Montage des essais sur montant isolé	105
2.2.	Détails des montants isolés testés	106
2.3.	Modèle éléments finis	107
3.	Analyse des résultats expérimentaux et numériques	108
3.1.	Résumé des résultats	108
3.2.	Montants isolés sans raidisseurs transversaux	109
3.3.	Montants isolés avec raidisseurs	113
3.4.	Analyse des résultats	115
4.	Bilan	116

5. Analyse de la connexion montant/quart d'ouverture	117
6. Etude par plans d'expérience.....	122
6.1. Etat de l'art	122
6.2. Etude des intervalles de validité	122
6.3. Données pour l'étude paramétrique	126
6.4. Développement du modèle mathématique [SAD, 91].....	127
6.5. Application et validation du modèle mathématique	128
7. Conclusion	129
PARTIE IV - Etude analytique du quart d'ouverture isolé -	131
1. Introduction.....	132
2. Etude des premiers modèles analytiques de quarts d'ouverture	133
2.1. Modèle avec classification des sections suivant l'Eurocode	133
2.2. Modèle avec adaptation de la classification de l'Annexe N.....	138
2.3. Bilan	140
3. Etude du critère de stabilité.....	141
3.1. Instabilité élastique des plaques minces :	141
3.2. Bilan	168
4. Adaptation du calcul de plaque au quart d'ouverture.....	169
5. Plaques semi-compactes.....	172
6. Conclusion	175
PARTIE V -Etude de l'ouverture globale-.....	177
1. Introduction.....	178
2. Modèle analytique de résistance ultime d'une ouverture rectangulaire	179
2.1. Répartition des efforts au sein d'un cadre hyperstatique	181
2.2. Cadre hyperstatique de degré 3	182
2.3. Etude post-plastique (après la formation des premières rotules)	183
2.4. Applications du modèle de résistance ultime de cadre	185
3. Résistances ultimes et modes de ruine pour diverses formes d'ouvertures sinusoïdales	188
4. Comparaison entre ouvertures sinusoïdale, rectangulaire et hexagonale	190
5. Bilan	194
6. Analyse du modèle ouverture isolée	195
6.1. Comparaison analytique/numérique	195
6.2. Etude numérique du modèle d'ouverture isolée	199
6.3. Bilan	202
7. validation du modèle analytique	203
8. Conclusion	208

Conclusion générale et Annexes

INTRODUCTION GENERALE

Depuis des décennies l'acier est utilisé pour les constructions de bâtiments et d'ouvrages d'art. Les connaissances acquises sur ce matériau ont permis de développer des éléments de structures toujours plus optimisés. Les ingénieurs de structure cherchent toujours les solutions permettant d'augmenter les portées et les performances des structures tout en maîtrisant les coûts. Les ouvertures réalisées dans les âmes des poutres en acier font partie des solutions innovantes qui permettent de faire passer les conduits de service tout en allégeant la structure et en augmentant ses performances mécaniques. Ce procédé permet de réduire l'épaisseur du plancher et par conséquent le coût du bâtiment.

La réalisation des ouvertures dans l'âme des poutres a connu des évolutions au niveau industriel. Pour les ouvertures hexagonales, l'approche la plus courante correspond à l'oxycoupage d'un profilé laminé à chaud standard découpé suivant une ligne en dents de scie. Les deux parties découpées sont ensuite réassemblées par soudage. La poutre finale est ainsi rehaussée de la moitié de la hauteur des ouvertures apparentes. Ce concept permet de gagner en inertie de flexion suivant l'axe principal sans apport de matière tout en permettant la création d'ouvertures. La même démarche a permis d'évoluer vers les poutres cellulaires à ouvertures circulaires. En parallèle avec ce développement, plusieurs études sont réalisées afin de proposer des méthodes représentatives pour le calcul et le dimensionnement de ces poutres à ouvertures régulières dans l'âme.

Récemment, une nouvelle forme d'ouverture est proposée. Elle offre des possibilités plus larges que les formes existantes au niveau esthétique et d'optimisation de production. Les ouvertures sinusoïdales présentent plusieurs avantages en comparaison avec la forme courante circulaire. Tout d'abord, la forme sinusoïdale offre une plus large gamme d'ouvertures permettant notamment l'introduction de gaines rectangulaires. De plus, sa fabrication nécessite un seul trait de découpe quand il en faut deux pour les poutres à ouvertures circulaires. Cette forme d'ouverture étant nouvelle, il n'existe pas d'étude connue qui traite de son comportement mécanique. **La présente étude a pour objectif de maîtriser le comportement mécanique de ces nouvelles poutres et de proposer une démarche analytique pour le calcul de leurs résistances.** La démarche suivie consiste à étudier des éprouvettes à l'échelle 1 en combinant les approches expérimentales et de modélisation par éléments finis en vue de proposer une méthode analytique de calcul de la résistance.

Le document est organisé en cinq parties. La première présente les travaux existants sur le comportement général des poutres à larges ouvertures d'âmes. Nous nous intéressons en premier lieu à l'influence de la présence d'une large ouverture isolée puis nous présentons les développements associés aux poutres cellulaires à ouvertures régulières. En effet, le comportement d'une ouverture isolée permet d'illustrer les prémices des modèles mécaniques servant à représenter le comportement des poutres à ouvertures multiples. Ensuite, nous soulignons au travers des études existantes que les changements des formes d'ouvertures reviennent à modifier significativement le comportement mécanique de la poutre au point de justifier de nouvelles études. Ainsi, l'évolution de l'ouverture circulaire en ouverture sinusoïdale peut impliquer certains

changements dans le comportement des poutres, notamment au niveau des modes de ruine sous l'effet de la flexion Vierendeel. C'est ce qui nous a amené à lancer des études expérimentales et numériques sur cette nouvelle forme d'ouverture.

En deuxième partie, nous présentons les résultats de la série de trois essais expérimentaux réalisés sur des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales. L'observation expérimentale a permis d'identifier différents modes de ruine en fonction de la forme de l'ouverture sinusoïdale. Ensuite, un modèle éléments finis, construit et validé sur la base des résultats expérimentaux, est utilisé pour étudier dans le détail les modes de ruine observés. Les principaux résultats tirés de ces études numériques ont permis, d'une part, de caractériser la ruine de la poutre par plastification ou instabilité de parties de l'ouverture (quarts d'ouverture), et d'autre part, de révéler l'existence d'un maintien semi-rigide des parois de l'ouverture par le montant d'âme pleine adjacent.

Afin de comprendre l'origine de cette semi-rigidité, dans une troisième partie, nous nous intéressons à des zones isolées de l'ouverture. Au travers d'une géométrie simplifiée d'éprouvettes, de nouveaux essais et un nouveau modèle numérique sont proposés pour identifier cette semi-rigidité. L'objectif est d'améliorer la connaissance de la résistance d'une partie isolée de l'ouverture (quart d'ouverture) en vue de développer un modèle analytique de vérification d'une ouverture globale. Nous proposons, sur la base de plans d'expériences, un modèle mathématique (méta modèle) capable de quantifier cette semi-rigidité en fonction des paramètres géométriques d'ouverture. En effet, nous constatons, en appliquant les règles actuelles de vérification de section, que celles-ci ne permettent pas de considérer les conditions réelles de maintien des sections autour d'une ouverture. C'est pourquoi, nous choisissons de nous concentrer ensuite sur l'analyse précise des règles existantes pour être en mesure de développer un nouveau modèle analytique de calcul qui suit les mêmes démarches que celles des normes actuelles.

La quatrième partie expose l'application des normes actuelles de classification de sections aux parois autour d'une ouverture sinusoïdale. Nous montrons la nécessité de revenir au développement d'un nouveau modèle de calcul de stabilité de plaque pour décrire le mieux possible la résistance de ces sections. En effet, nous intégrons, dans le calcul de la contrainte critique d'une plaque, les conditions réelles de maintien des sections considérées pour en déduire une résistance plus adaptée. Les travaux de cette partie permettent de mieux caractériser la résistance de chaque section grâce à une meilleure prise en compte des conditions aux limites. Ainsi, nous proposons une démarche de calcul de résistance d'un quart d'ouverture la plus précise possible. Ensuite, chaque quart d'ouverture est vérifié vis-à-vis de ses sollicitations propres en fonction de sa position le long de la poutre et autour de l'ouverture.

Dans la dernière partie, nous étudions les mécanismes de ruine des quarts d'ouverture isolés et leur interaction autour de l'ouverture, en vue de proposer un modèle analytique. Ainsi, le comportement mécanique d'une d'ouverture isolée chargée en console est analysé. En effet, les études numériques réalisées en partie deux ont permis de mettre en évidence l'existence d'un mécanisme de ruine de l'ouverture sinusoïdale. L'objectif de l'étude est de considérer, en plus de la ruine d'une partie de l'ouverture, la combinaison des ruines des différentes parties qui la composent. La modélisation par éléments finis montre l'existence d'une succession de mécanismes de ruine des différents quarts qui composent l'ouverture. Sur la base de l'étude théorique de répartitions des

efforts autour d'un cadre hyperstatique, nous montrons la nouvelle répartition d'efforts dans les différentes membrures après la formation d'une ou plusieurs rotules plastiques. Le modèle analytique développé est validé par comparaison avec le modèle éléments finis pour différentes configurations géométriques de poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales.

Pour des raisons de clarté du manuscrit, plusieurs parties ont été retirées et insérées en Annexe. L'Annexe A rappelle la terminologie utilisée et l'Annexe B présente les travaux effectués pour traiter l'interaction moment-effort axial d'une section en té. Les autres annexes servent de compléments pour les différentes parties du manuscrit. Enfin, l'Annexe G présente le modèle analytique développé durant ce travail de recherche et propose un exemple d'application afin d'illustrer le principe de vérification utilisé par ce dernier.

PARTIE I - ETAT DE L'ART-

- 1- Introduction
- 2- Bilan des premières études menées sur les poutres alvéolaires
- 3- Comportement des poutres à larges ouvertures isolées
- 4- Poutres à ouvertures multiples
- 5- Poutres à ouvertures d'âme en construction mixte
- 6- Poutre AngelinaTM
- 7- Conclusion

1. INTRODUCTION

Les poutres de grandes portées sont de plus en plus utilisées en construction métallique pour obtenir une grande flexibilité dans l'utilisation des surfaces. Ces grandes portées nécessitent en général d'utiliser des profilés de grande hauteur auxquels viennent s'ajouter les passages pour équipements techniques et circuits de ventilation. Pour réduire la hauteur totale des planchers, une des solutions pratiquées est de prévoir des ouvertures dans l'âme des poutres afin de permettre le passage des conduits techniques tout en maintenant une épaisseur de plancher minimale (voir **Figure I-1**). Ce procédé permet de réduire la hauteur d'étage et par conséquent la hauteur globale du bâtiment [LAG, 08].

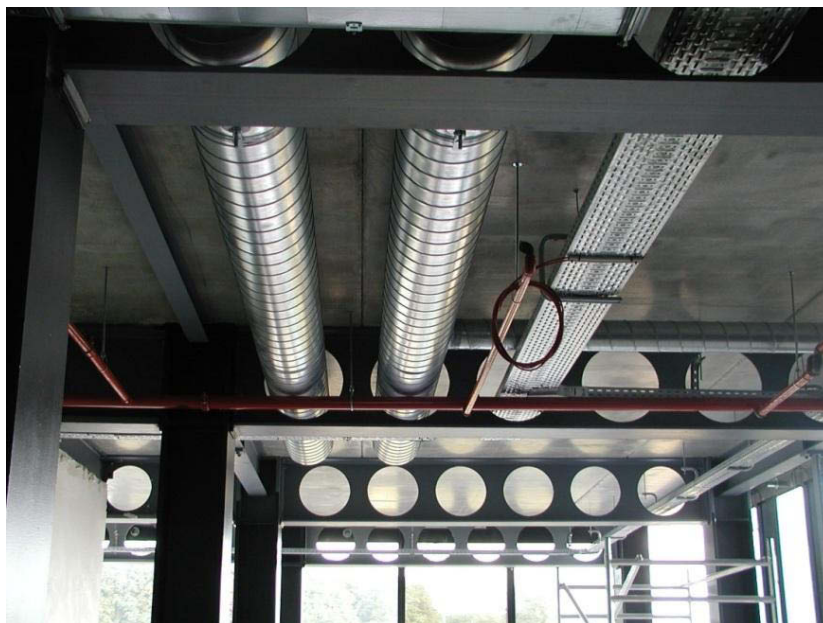


Figure I-1 Exemple de plancher avec intégration de conduits au travers des ouvertures des poutres cellulaires [DUR, 09]

Les ouvertures larges peuvent aller de 40 à 80% de la hauteur finale des poutres. La présence de ces ouvertures implique des changements au niveau du comportement mécanique des poutres, notamment l'apparition de modes de ruine locaux autour des ouvertures. Ces ouvertures dans l'âme ont peu d'influence sur la résistance à la flexion de la poutre mais affaiblissent la résistance au cisaillement. Le transfert de ce cisaillement devient alors un critère principal de dimensionnement. Une première présentation chronologique des études menées sur les poutres munies de larges ouvertures est donnée dans le paragraphe suivant et présente les premières observations de ruines spécifiques à ce genre de poutres communément appelées poutres alvéolaires (ouvertures hexagonales) ou poutres cellulaires (ouvertures circulaires).

Ensuite nous présentons d'une part les règles de calculs qui permettent de traiter le comportement mécanique d'une poutre munie d'une ouverture isolée. Puis nous exposons les modes de ruine et les règles de calcul liées aux poutres munies de multiples ouvertures. Enfin, nous introduisons la nouvelle forme d'ouverture sinusoïdale, objet du présent travail. Au travers des

diverses recherches effectuées sur les poutres cellulaires, nous montrons que les règles de calcul existantes ne sont pas adaptées à cette forme d'ouverture, d'où l'intérêt de développer un nouveau modèle analytique.

2. BILAN DES PREMIERES ETUDES MENEES SUR LES POUTRES ALVEOLAIRES

Kerdal, Nethercot [KER, 84] puis Demirdjian [DEM, 99] et Tsavdaridis [TSA, 10] présentent les premiers travaux de divers chercheurs datant de l'après-guerre. Les recherches décrites par Kerdal et Nethercot [KER, 84] ont permis d'identifier 6 principaux modes de ruine des poutres alvéolaires. Ils sont principalement liés à la géométrie de la poutre globale (voir Annexe A pour terminologie), à l'élancement de l'âme, aux dimensions de l'ouverture, au type de chargement, aux conditions aux limites (maintiens anti-déversement) et à la position des ouvertures (dans le cas d'ouvertures isolées). Les modes de ruine sont de nature commune avec les poutres à âmes pleines (ruines globales) ou de nature spécifique aux poutres à ouvertures d'âmes (ruines locales). Ces modes peuvent être synthétisés ci-après en tant que locaux (mettant en jeu des sections locales autour de l'ouverture) ou globaux (mettant en jeu la section globale de la poutre) :

- Modes de ruine locaux : ces modes mettent en jeu les sections locales autour de l'ouverture. Trois modes distincts ont pu être observés :
 - Flexion Vierendeel, correspondant à la flexion locale des sections en té aux coins de l'ouverture due au transfert de cisaillement autour de l'ouverture.
 - Flambement du montant intermédiaire (poutres alvéolaires) par cisaillement horizontal ou par compression directe liée à un chargement ponctuel.
 - Rupture de la soudure du montant intermédiaire (poutre alvéolaire formée à partir d'un profilé laminé à chaud). Cette rupture de soudure est associée au cisaillement horizontal du montant. Les essais de Hosain et Speirs (cités par [KER, 84], [DEM, 99] et [TSA, 10]) en 1971 ont permis de mettre en évidence ce mode de ruine.
- Globaux :
 - Flexion globale, dans le cas où l'ouverture critique se situe en zone de flexion pure. Dans ce cas, les membrures inférieure et supérieure de l'ouverture se plastifient par traction ou compression.
 - Cisaillement global, ce mode peut survenir dans le cas où l'ouverture se situe en zone de fort cisaillement et de faible longueur. Des ruines par cisaillement direct des sections des membrures supérieures et inférieures au droit de l'ouverture critique ont été observées.
 - Déversement global qui, sans maintien adéquat, constitue souvent le mode de ruine principal de ces poutres car la présence des ouvertures dans l'âme des poutres diminue de manière importante leur rigidité torsionnelle (résultat des recherches menées par Kerdal et Nethercot en 1984 [KER, 84]).

Les premières études expérimentales citées par [KER, 84], [DEM, 99], et [TSA, 10] peuvent être attribuées aux chercheurs Altifillish, Cooke et Toprac en 1957. Les études expérimentales ont été menées sur des poutres alvéolaires (ouvertures de forme hexagonale régulièrement réparties sur la longueur de la poutre). Ces essais se composaient de 3 poutres bi-appuyées en flexion 4 points. Deux modes de ruine ont pu être observés, une ruine par flexion globale avec plastification des membrures supérieure et inférieure par effort axial ainsi qu'une ruine par flexion locale des coins de l'ouverture liée au cisaillement global de l'ouverture (voir **Figure I-2**). Ces essais furent les premiers à identifier une flexion locale des membrures de l'ouverture la plus sollicitée, phénomène communément appelé flexion Vierendeel. Cette flexion locale des membrures supérieure et inférieure de l'ouverture critique est illustrée sur la **Figure I-2** avec la formation de 4 rotules plastiques aux 4 coins de l'ouverture hexagonale.

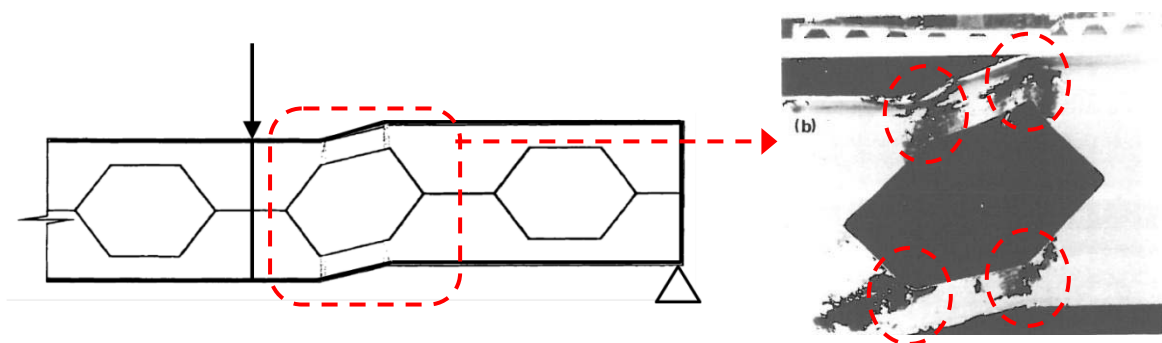


Figure I-2 Illustration de la flexion Vierendeel et formation de 4 rotules plastiques

L'observation de la ruine a montré une plastification d'un coin de l'ouverture en premier ; ensuite arrive la ruine finale avec l'observation d'un voilement par compression du coin opposé. Ces premières observations mettent ainsi en évidence deux points importants. Tout d'abord, **l'existence d'une flexion locale des membrures** liée au transfert de cisaillement autour d'une ouverture (la flexion ou effet Vierendeel) et la caractérisation d'une **résistance supplémentaire liée au schéma cinématique de ruine par formation successive de rotules plastiques**.

Toprac et Cooke en 1959 ont effectué des études sur 9 poutres alvéolaires jusqu'à la ruine. L'objectif principal était d'étudier le comportement à la ruine de ces poutres. Certains essais se sont terminés par déversement global et n'ont pas pu être exploités du fait que ce mode ne faisait pas partie des phénomènes étudiés. De la même façon que précédemment, il a pu être observé une ruine par plastification dans un coin de l'ouverture critique située en zone de fort cisaillement. Dans le cas des poutres pour lesquelles les ouvertures critiques étaient situées en zone de flexion pure, la ruine était caractérisée par la plastification en compression et traction des membrures supérieure et inférieure de l'ouverture.

D'autres études expérimentales ont été menées par Sherbourne (1966) visant à étudier l'interaction entre la flexion et le cisaillement en observant le mode de ruine ainsi que l'influence des conditions de chargement. Ces études sont les prémices des recherches effectuées notamment par Redwood [RED, 78] et plus tard par Chung et al. [CHU, 01-2][CHU, 03] qui cherchent à caractériser la résistance des ouvertures en fonction des rapports entre le moment sollicitant et le moment

résistant, et entre l'effort tranchant sollicitant et l'effort tranchant résistant de l'ouverture considérée. La **Figure I-3** donne l'allure de la courbe tirée de l'équation d'interaction simplifiée fournie par la référence [CHU, 01-2] (**Equation I-1**). La figure présente la courbe d'interaction des rapports $M_{Sd}/M_{0,Rd}$ et $V_{Sd}/V_{0,Rd}$ (avec M_{Sd} , V_{Sd} les efforts de flexion et de cisaillement globaux au niveau de l'ouverture et $M_{0,Rd}$ et $V_{0,Rd}$ les résistances de la section perforée à la flexion et l'effort tranchant). Les études numériques ont montré que la résistance réelle de l'ouverture est souvent sous-estimée (de l'ordre de 10 à 15 % dans les gammes d'ouvertures testées par les auteurs [CHU, 01-2]).

$$\left(\frac{V_{Sd}}{V_{0,Rd}} \right)^{2.5} + \left(\frac{M_{Sd}}{M_{0,Rd}} \right)^{2.5} \leq 1 \quad \text{Equation I-1}$$

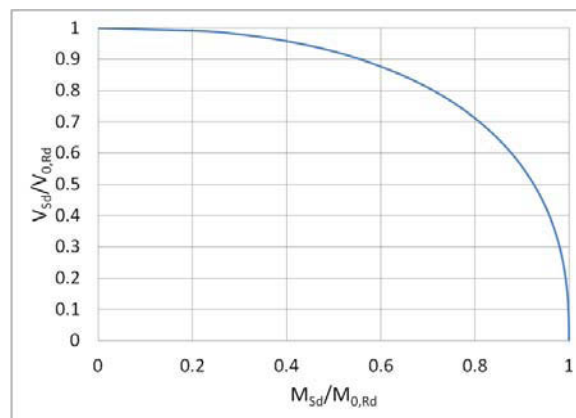


Figure I-3 Courbe d'interaction correspondant à l'équation

Halleux proposa en 1967 des résultats expérimentaux sur 5 poutres alvéolaires. Bazile et Texier en 1968 et Husain et Speirs en 1971 ont fait plusieurs essais mettant en évidence le flambement du montant intermédiaire entre deux ouvertures proches des appuis (où le cisaillement est élevé). Les auteurs relient ce mode de ruine au fait que les ouvertures de ces poutres alvéolaires avaient un faible espacement qui impliquait des montants intermédiaires élancés [DEM, 99]. Ces diverses études expérimentales ont permis de formuler les premières conclusions théoriques sur le comportement à l'état ultime des poutres munies d'ouvertures isolées ou régulièrement réparties (poutres alvéolaires).

Dans la suite de cette première partie, nous nous intéressons tout d'abord au comportement mécanique d'une poutre en acier munie d'une large ouverture rectangulaire isolée dans l'âme. Puis nous présentons l'évolution des techniques de fabrication qui ont mené au développement des poutres cellulaires. Enfin, nous exposons l'état de l'art relatif aux études réalisées sur les poutres cellulaires en considérant les approches expérimentales, numériques et analytiques. L'objectif est de faire le bilan des approches utilisées, de leurs forces et de leurs faiblesses, en vue d'avoir une base de travail pour le cas particulier des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales.

3. COMPORTEMENT DES POUTRES A LARGE OUVERTURE ISOLEE

3.1. Introduction

Les poutres avec ouvertures isolées de formes rectangulaires sont relativement courantes dans le domaine de la construction. Elles ont permis de passer des gaines techniques et des équipements dans des zones limitées des planchers. Les larges ouvertures ont en règle générale des tailles comprises entre 30 et 75% de la hauteur de la poutre.

Compte tenu de la distribution des efforts internes le long des poutres, le mode de ruine autour des ouvertures dépend de la position de l'ouverture sur cette longueur. En effet, il a été observé expérimentalement, que les ouvertures non renforcées, situées dans des zones soumises à un moment fléchissant pur, atteignent leur ruine par plastification en compression et traction des deux membrures, supérieure et inférieure, qui entourent l'ouverture (voir § 3.3).

Par contre, les mêmes ouvertures situées dans une zone de fort cisaillement, montrent un comportement plus complexe dû à la flexion locale des membrures engendrée par le transfert de cisaillement aux quatre coins de l'ouverture [RED, 78], [DAR, 03]. Les observations expérimentales ont montré un mode de ruine s'apparentant à celui d'un cadre de poutre échelle (ou poutre Vierendeel) avec la formation des 4 rotules plastiques (comme présenté sur la Figure I-4).

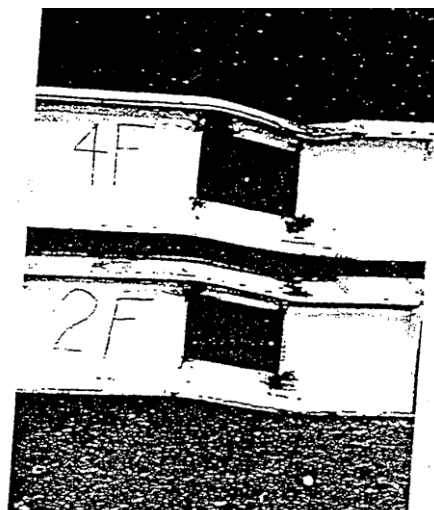


Figure I-4 Formation des rotules plastique par flexion Vierendeel [RED, 78]

Les principales formules analytiques de calcul de la résistance d'une poutre munie d'une ouverture isolée sont présentées ci-après. Elles sont présentées en deux catégories, les vérifications globales (liées au panneau d'âme et à la section perforée) et les vérifications locales (liées aux membrures supérieures et inférieures).

3.2. Vérifications des résistances globales

3.2.1. Vérification au voilement par cisaillement global et cisaillement

En se référant à l'EN1993-1-1, une âme cisailée est considérée prémunie contre le risque de voilement par cisaillement, si le rapport hauteur sur épaisseur vérifie l'inégalité suivante: $d/t_w < 72\varepsilon/\eta$. Si ce critère n'est pas vérifié, alors la résistance au cisaillement pure de la section d'acier est réduite en raison du voilement par cisaillement de l'âme [JOH, 07].

Avec :

- $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$
- $\eta = 1$, valeur préconisée par l'eurocode 3 [EC3-1-1] et par le guide de dimensionnement de poutres ajourées [JOH, 07].

Dans le cas d'un possible voilement d'âme par cisaillement, plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour traiter ce phénomène dans le cas de poutres munies d'ouvertures.

Le comportement d'une poutre à âme élancée à ouverture d'âme a des similitudes avec celui d'une poutre à âme pleine élancée avec ou sans raidisseur transversaux intermédiaires. Le calcul de la résistance au voilement par cisaillement d'une poutre à âme pleine raidie à ses extrémités ou par des raidisseurs transversaux intermédiaires peut s'effectuer suivant la démarche décrite dans l'Eurocode 3-1-1[EC3-1-1]. La méthode est détaillée par Ph. Lequien [LEQ, 91]. L'annexe N de la version ENV de l'EC3 a proposé l'adaptation de ces formules pour les poutres à grand élanement avec ouvertures dans l'âme en s'appuyant sur les travaux de Narayanan [ENV, 95] [NAR, 85]. Cette norme propose de comparer la résistance plastique au cisaillement avec la résistance au voilement par cisaillement.

La démarche proposée dans l'annexe N expose deux méthodes de calcul de la résistance au voilement par cisaillement en utilisant le même formalisme que celui pour une âme pleine. Les deux méthodes proposées sont les suivantes :

- méthode postcritique simple : $V_{ba,Rd}$
- méthode du champ diagonal : $V_{bb,Rd}$

La seconde méthode est adaptée seulement pour les poutres avec raidisseurs transversaux intermédiaires. Les deux méthodes de vérification sont basées sur les mêmes vérifications que celles pour une poutre à âme pleine.

La ruine d'un panneau d'âme pleine (ou munie d'une ouverture) due au voilement par cisaillement est caractérisée par une première phase de voilement. Cependant le panneau d'âme n'atteint pas sa charge ultime lors du voilement et offrent une résistance postcritique.

L'état de contraintes d'un panneau d'âme cisailé est représenté dans le repère des contraintes principales (compression et traction) orienté suivant les diagonales du panneau (voir **Figure I-5**).

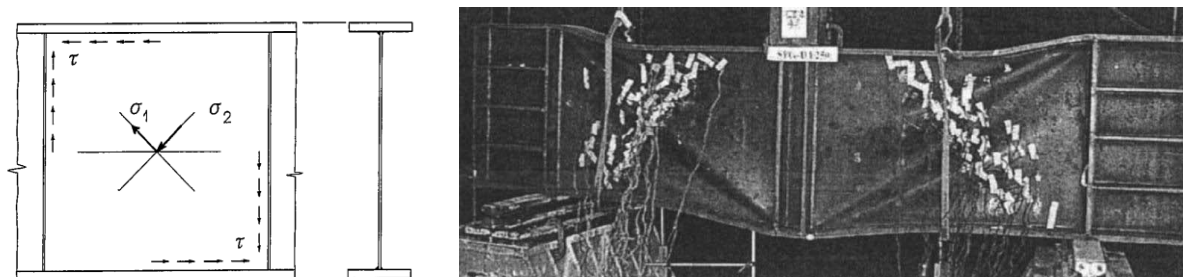


Figure I-5 Contraintes principales de compression et traction d'un panneau en cisaillement pur [Ali, 09]

Le panneau d'âme, après voilement de la diagonale comprimée peut continuer à reprendre des efforts grâce à la capacité portante supplémentaire apportée par la diagonale en traction (ce qui implique un fonctionnement du panneau similaire à un treillis). Les méthodes de vérification d'un panneau d'âme élancé, muni d'une ouverture ou pas, permettent de tenir compte de cette réserve de résistance. Cette réserve de résistance est apportée d'une part, par la diagonale tendue et d'autre part, par le mécanisme de cadre final engendré par la formation de rotules plastiques au sein des semelles supérieure et inférieure (repérées par les lettres W, X, Y et Z sur la **Figure I-6**) [NAR, 85][LIA, 04].

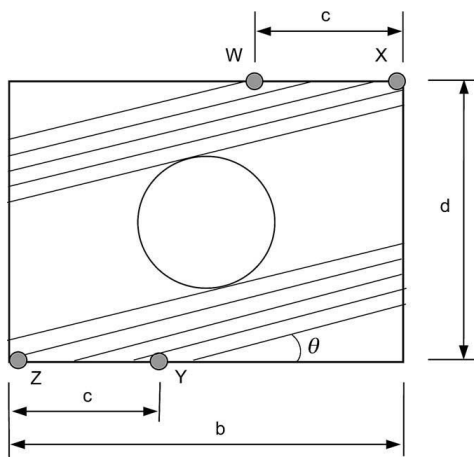


Figure I-6 Mécanisme de ruine d'un panneau d'âme avec ouverture centrée [LIA, 04]

La vérification d'un panneau d'âme élancé muni d'une ouverture isolée a fait l'objet du développement d'un modèle analytique simplifié. Cette résistance au voilement par cisaillement est donnée par :

$$V_{bw,Rd} = 0,9V_{b,Rd} \left(1 - \frac{\sqrt{d_0 l_0}}{h_w} \right)$$

Equation I-2

Où $V_{b,Rd}$ est la résistance au voilement par cisaillement selon l'EC3-1-5§5.2 [EC3-1-5]. De plus, pour une ouverture circulaire d_0 (hauteur d'ouverture) = l_0 (longueur d'ouverture). Cette dernière méthode suit les formules de l'Eurocode 3 -1-5, basés sur des modèles considérant l'effet d'un champ de traction. Cette méthode n'est donc applicable qu'à des ouvertures isolées [JOH, 07].

3.2.2. Résistance à l'effort tranchant

La résistance à l'effort tranchant est vérifiée en considérant les deux modes de ruine susceptibles de se produire et qui correspondent à la résistance plastique du Té et la résistance au voilement par cisaillement du panneau d'âme du té en console. L'ouverture est centrée à mi-hauteur de l'âme, et l'effort tranchant est supposé réparti à parts égales entre les deux tés. Ainsi, chaque Té reprend un effort tranchant sollicitant égal à $V_{Ed}/2$. Dans les cas de dissymétrie, la répartition de l'effort tranchant dans chaque membrure peut se faire au prorata des aires de cisaillement des deux membrures. La résistance plastique à l'effort tranchant de la section perforée est donnée par l'Equation I-3.

$$V_{0,pl,Rd} = (h_w - D) \times \frac{f_{yw}/\sqrt{3}}{\gamma_{M0}} \quad \text{Equation I-3}$$

Avec :

- h_w : hauteur d'âme totale de la poutre
- D : hauteur d'ouverture

3.2.3. Résistance à la flexion au droit de l'ouverture

Au niveau d'une large ouverture, le moment global se répartit dans les membrures de l'ouverture sous la forme d'un effort de compression et de traction comme illustré à la Figure I-7. [BIT, 04]

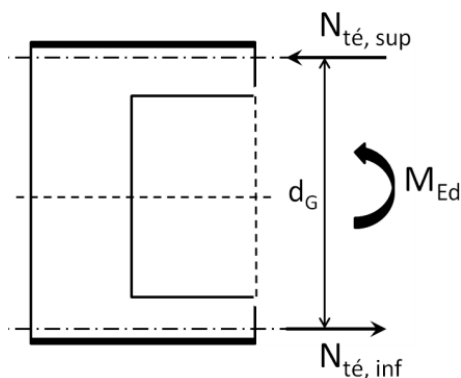


Figure I-7 Répartition du moment fléchissant global dans les membrures d'une ouverture rectangulaire

Les membrures supérieure et inférieure sont constituées de sections en té. La résistance est établie par le produit des aires des tés avec le bras de levier d_G calculé à partir des centres de gravité de chacun des deux tés. Il faut noter que dans le cas de moment positif, la membrure supérieure est sollicitée en compression. De ce fait, la section du té supérieur peut se retrouver réduite à une section efficace si elle est de classe 4. Si les deux tés ne sont pas égaux, pour simplifier les calculs, il peut être choisi de faire l'approximation de considérer le minimum des deux aires tel que :

$$A_{Té} = \min (A_{Té,sup}; A_{Té,inf}) \quad \text{Equation I-4}$$

La résistance à la flexion globale peut donc s'écrire :

$$M_{0,Rd} = A_{Té} \times d_G \times f_y / \gamma_{M0} \quad \text{Equation I-5}$$

La vérification consiste à comparer le moment sollicitant avec le moment résistant et s'écrit:

$$M_{Ed} < M_{0,Rd} \quad \text{Equation I-6}$$

L'effet d'un effort tranchant élevé dans les tés est pris en compte en considérant une section efficace de l'âme. Une formule d'interaction simple peut être utilisée pour calculer l'épaisseur d'âme efficace dans le but de tenir compte des interactions M-V et M-N-V : [EN3-1-1] [VEL, 06]

- Si $\rho \leq 0,5$: $t_{weff} = t_w$
- Si $\rho > 0,5$: $t_{weff} = t_w \times (1 - (2 \times \rho - 1)^2)^{0,5}$

Avec : $\rho = V_{Ed} / V_{0,pl,Rd}$

3.3. Vérifications des résistances locales

3.3.1. Résistance à la flexion Vierendeel

L'équilibre des membrures supérieure et inférieure permet de déterminer que le transfert de cisaillement autour de l'ouverture induit une flexion locale. Cette flexion locale, appelée flexion Vierendeel, a une distribution linéaire le long de chacune des deux membrures avec deux extrema de signes opposés aux deux coins de chaque membrure et passant par un point de moment nul au milieu de l'ouverture. De ce fait, l'hypothèse simplificatrice pour traiter ce moment local revient à considérer une rotule au milieu de chaque membrure et à répartir les efforts globaux comme décrit à la Figure I-8 [RED, 78] [KOL, 64] [BIT, 04].

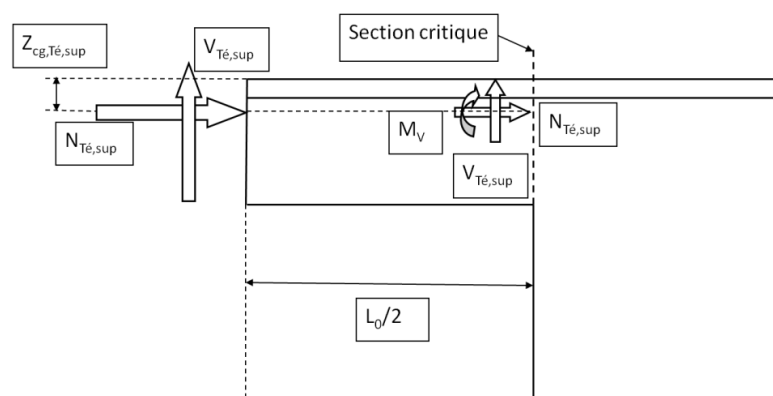


Figure I-8 Sollicitations d'un quart d'ouverture rectangulaire

Par conséquent, les efforts internes appliqués au niveau de ces points de moment nul sont un effort normal et un effort de cisaillement. Ainsi, le moment fléchissant global de la poutre peut se décomposer, au droit de l'ouverture, en efforts de compression et de traction dans les membrures supérieure et inférieure. L'effort tranchant au niveau du point de moment nul permet de calculer la variation du moment interne local le long de l'ouverture. Ce moment local supplémentaire est appelé moment Vierendeel. Ces moments locaux, qui équilibrent le transfert de cisaillement autour de l'ouverture, ont leurs maximums au niveau des 4 coins de l'ouverture rectangulaire.

Le moment local Vierendeel sollicitant s'écrit :

$$M_V = V_{Té,sup} \times L_0/2 \quad \text{Equation I-7}$$

Le moment Vierendeel sollicitant M_V est comparé au moment résistant de la section en té du coin de l'ouverture M_{Rd} qui correspond au moment plastique ou élastique selon la classe de la section (voir §3.3.2). Il faut ensuite tenir compte de l'interaction moment-effort axial et moment-effort tranchant. La seconde interaction revient à calculer une épaisseur efficace de l'âme. L'interaction moment-effort axial était considérée dans les premiers modèles proposés par la littérature comme étant linéaire [LAW, 87]. Comme cette approche s'est avérée trop conservatrice, l'interaction est représentée par une forme quadratique pour les sections de classe 1 ou 2 et une forme linéaire pour les autres classes [LAW, 06]:

Le moment résistant plastique réduit par l'effort normal s'écrit¹:

$$M_{N,pl,Rd} = M_{pl,Rd} \times [1 - (N/N_{pl})^2] \quad \text{Equation I-8}$$

¹ Il faut noter que cette interaction est une approximation qui se base sur l'interaction M-N d'une section rectangulaire. On verra ultérieurement que cette interaction peut s'avérer conservatrice par rapport à l'interaction exacte et parfois même non sécuritaire. Une approche simplifiée et plus exacte est présentée en Annexe B.

Le moment résistant élastique s'écrit sous la forme suivante:

$$M_{N,el,Rd} = M_{el,Rd} \times [1 - (N/N_{pl})] \quad \text{Equation I-9}$$

Dans les cas d'ouvertures autres que rectangulaires, Redwood propose une adaptation des méthodes présentées en considérant des longueurs d'ouvertures rectangulaires équivalentes. Par exemple, dans le cas d'une ouverture circulaire, il est proposé de considérer une ouverture rectangulaire équivalente de longueur $L_0 = 0,45 \times (\text{diamètre de l'ouverture circulaire})$ et de hauteur $h = 0,90 \times (\text{diamètre de l'ouverture circulaire})$ [RED, 78] et [LAW, 06].

Les travaux de J.K. Ward [WAR, 90] basés sur les éléments finis ont permis de proposer une méthode spécifique pour les ouvertures circulaires. L'étude propose de vérifier la résistance de toutes les sections en té autour de l'ouverture. Ainsi, à partir de la section en Té la plus faible autour de l'ouverture, soumise à un effort normal et à un effort tranchant, les efforts internes sont calculés dans les sections inclinées autour du centre de l'ouverture. Ces sections inclinées sont soumises à une combinaison d'effort axial, de cisaillement et de flexion locale. Les résistances des sections en Té dans les plans inclinés sont déterminées et comparées aux sollicitations pour chaque section.

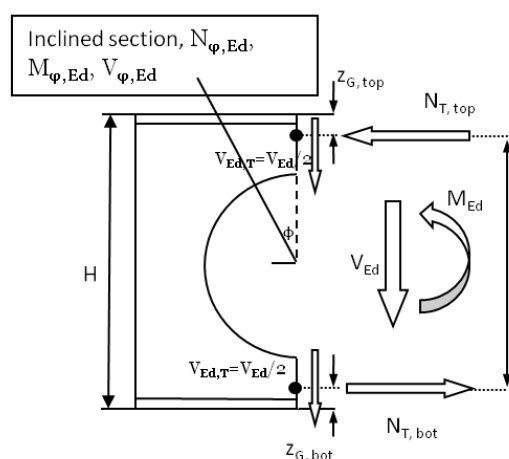


Figure I-9 Définition des sections en T autour d'une ouverture [DUR, 12-1]

Cette approche incrémentale donne des résultats plus précis par rapport à une vérification d'ouverture rectangulaire équivalente, en comparaison avec les résultats issus de calculs par éléments finis, pris comme référence. Ainsi, ce modèle analytique est utilisé pour l'étude des poutres à ouvertures circulaires uniformément réparties sur la longueur (poutres cellulaires).

Pour évaluer le moment résistant des sections en Té autour de l'ouverture, il est nécessaire de connaître la capacité de déformation de leurs fibres les plus sollicitées en compression avant l'apparition d'un voilement local. Pour ce faire, une classification d'ouverture a été développée sur la base d'un critère de stabilité de paroi. Cette classification définit si les sections en té, constituant l'ouverture, peuvent être considérées comme pouvant atteindre leurs résistances plastiques (classe 1 et 2), ou doivent être limitées à leurs résistances élastiques (classe 3). Le paragraphe suivant

présente brièvement l'évolution du critère de stabilité de plaque qui a permis le développement de cette classification, utilisée ensuite dans la littérature et l'Annexe N de la version ENV des Eurocodes.

3.3.2. Stabilité locale de l'âme autour de l'ouverture

Dans les cas d'ouvertures non raidies à faible élancement, celles-ci restent susceptibles de voiler localement par flexion Vierendeel. Du fait que la membrure inférieure est soumise à de la traction due à la flexion globale (en cas de moment positif), le voilement local est plus à même de se produire au niveau de la membrure supérieure comprimée par flexion globale. Plusieurs facteurs influencent la stabilité locale de la membrure comprimée et de ce fait la résistance à la compression des sections en T le long de cette membrure. Lawson dans la référence [LAW, 87] décrit les différentes hypothèses permettant d'établir un critère de stabilité de l'âme de la membrure comprimée d'une ouverture rectangulaire (voir Figure I-8).

Premièrement, il y a une évolution des contraintes, de la compression à la traction, le long de la membrure supérieure. La partie d'âme en bord libre de cette membrure étant d'un côté comprimée et de l'autre tendue par flexion Vierendeel. Deuxièmement, la semelle est supposée maintenue latéralement, ce qui permet de considérer l'âme comme appuyée sur la semelle². Troisièmement, l'existence de la continuité procurée par l'âme pleine adjacente à l'ouverture est prise en compte. Ces effets sont représentés sur la Figure I-10.

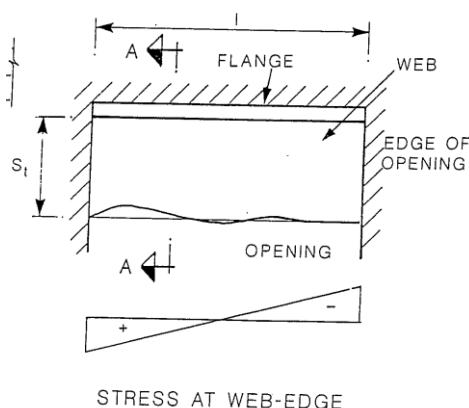


Figure I-10 Illustration des conditions de maintien et de chargement supposées par Lawson pour étudier la stabilité de l'âme d'une membrure d'ouverture rectangulaire [LAW, 87]

L'ouverture (ou la demi-ouverture) est donc modélisée comme une plaque appuyée sur trois bords et chargée par un diagramme de contrainte linéaire avec une partie en traction et une partie en compression. La résistance au voilement de cette plaque est calculée pour représenter celle d'une demi-ouverture d'âme rectangulaire. Lawson décrit le critère de voilement d'âme pour une âme en console (correspondant à la partie d'âme de la membrure d'une ouverture). Ce critère a été choisi afin d'estimer la stabilité de cette paroi pour justifier ou non une résistance plastique totale des

²Cette hypothèse est utilisée initialement pour les poutres mixtes où le maintien est assuré par la dalle. La classification est étendue aux poutres en acier seul sans revenir sur cette hypothèse.

sections qui composent la membrure comprimée. Les conditions décrites par la **Figure I-10** amènent à la formule ci-dessous (**Equation I-10**), déduite des règles du British Standard 5190 de 1985 et décrite par Lawson dans la référence [LAW, 87].

$$s_{te} = \frac{s_t}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \times s_t}{k \times l}\right)^2}} \quad \text{Equation I-10}$$

Avec :

- k : facteur symbolisant l'influence combinée de la forme du diagramme de flexion locale le long du té supérieure et de l'effet de continuité.
- s_t : hauteur d'âme au-dessus de l'ouverture.

Le critère $s_t < 9,5t_w\epsilon$, utilisé comme critère de classification d'une paroi en console comprimée, est ici utilisé pour l'âme du té de l'ouverture. Si ce critère n'est pas vérifié, la norme anglaise propose d'utiliser la formule de l'**Equation I-10**. Celle-ci tient compte de l'apport de rigidité des supports adjacents et de la variation de sollicitation sur la longueur de la membrure.

« Pour un rapport de contraintes dans l'âme de chaque côté de l'ouverture inférieur à -0,5, alors k est en théorie égal à 0,66. En considérant un coefficient multiplicateur de 0,75 pour continuité, $k = 0,66 \times 0,75 = 0,5$ [LAW, 87] ». Dans les cas où l'âme est en compression uniforme sur toute la longueur de l'ouverture le coefficient k prend la valeur $k = 1,0$. [LAW, 87]

Ainsi, dans l'exemple d'une ouverture soumise à un rapport de contraintes de -1 entre ses deux côtés (traction = compression)³, cela donne :

$$s_{te} = \frac{s_t}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \times s_t}{0,5 \times l}\right)^2}} \quad \text{Equation I-11}$$

En considérant $s_t = 9,5t_w\epsilon$, qui est la limite de la classe 2 pour une paroi en console dans l'ancienne version du BS 5950 de 1985, alors le critère devient :

$$s_{te} = \frac{9,5 \times t_w \times \epsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{38 \times t_w \times \epsilon}{l}\right)^2}} \quad \text{Equation I-12}$$

³ Cette configuration de chargement est la seule considérée dans les modèles de calcul actuels de vérification de stabilité locale de l'âme au droit d'une ouverture. [ENV3-1-1] [VEL, 06]

Cette formule est reprise dans l'annexe N, pour la classe 2. Elle permet de justifier d'une résistance plastique totale des sections comprimées, avec d_w la hauteur d'âme libre d'une membrure au droit d'une ouverture:[ENV, 95]

$$d_w = \frac{10 \times t_w \times \varepsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{32 \times t_w \times \varepsilon}{l_0}\right)^2}} \quad \text{Equation I-13}$$

Ce critère défini dans l'annexe N de la version ENV des Eurocodes utilise un 10 au numérateur. Cette valeur de 10 est due à la classification donnée dans le British Standard BS 5950 de 2001 [BS, 01], qui définit la classe 2 (classe de sections pour lesquelles la rotule plastique peut se former sans présence de voilement local) par ce coefficient pour une paroi en console (même valeur que les Eurocodes). Le terme $32t_w\varepsilon$ de l'Equation I-13 reprend la même classification du BS 5950 pour une paroi interne soumise à compression induite par flexion, là où l'Eurocode utilise une valeur de $38t_w\varepsilon$.

Il faut préciser que le cheminement est le même quant au critère de classe 3 défini dans l'Annexe N (classification de membrure comprimée d'une ouverture permettant de justifier d'une résistance pas plastique mais élastique des sections de la membrure comprimée). La littérature reprendra ensuite cette forme de classification pour justifier la résistance plastique ou élastique des sections autour d'une ouverture [CHU, 01], [VEL, 06] sans remettre en question son applicabilité du fait de la bonne concordance des résultats finaux analytiques avec les résultats numériques pour les cas des poutres alvéolaires étudiées. Cette petite étude de l'évolution des critères de vérification de stabilité de parois permet de mieux comprendre les fondements du critère utilisé communément dans la littérature pour justifier la résistance des sections des membrures d'une ouverture.

Les méthodes de calcul évoluent avec les techniques de conception et de fabrication. L'apparition de nouvelles poutres munies d'ouvertures uniformément réparties, implique de nouveaux modèles mécaniques. La partie suivante présente les différentes vérifications à effectuer pour les poutres alvéolaires. Ces vérifications sont principalement basées sur les premiers modèles développés ci-avant pour les ouvertures isolées, notamment pour vérifier la résistance des ouvertures vis-à-vis de la flexion Vierendeel.

4. POUTRES A OUVERTURES MULTIPLES

L'utilisation des poutres à âmes ajourées a connu un grand succès et entraîne la fabrication industrielle de poutres à ouvertures dans l'âme régulièrement espacées. Ces poutres, de par leurs formes, en plus de procurer une grande facilité d'intégration d'équipements techniques, sont utilisées comme expression architecturale et sont donc amenées le plus souvent à rester apparentes. Elles donnent un aspect de grande légèreté et de haute technologie.

Ces poutres, d'abord appelées poutre alvéolaires du fait de leurs ouvertures hexagonales, sont fabriquées en découpant un profilé laminé par oxycoupage (voir Figure I-11). Le résultat est une

poutre de plus grande hauteur à poids égal. Ainsi, l'inertie globale du profilé originel et sa résistance à la flexion se trouvent augmentées mais en affaiblissant la résistance au cisaillement. Le principal avantage de ce type de poutre est d'augmenter la hauteur de la poutre sans augmenter le poids. Dans certains cas la hauteur peut être doublée, ce qui améliore grandement la rigidité autour de l'axe de flexion principal tout en intégrant des ouvertures dans l'âme qui permettent le passage de conduits de ventilation et réduisent ainsi l'épaisseur de plancher.

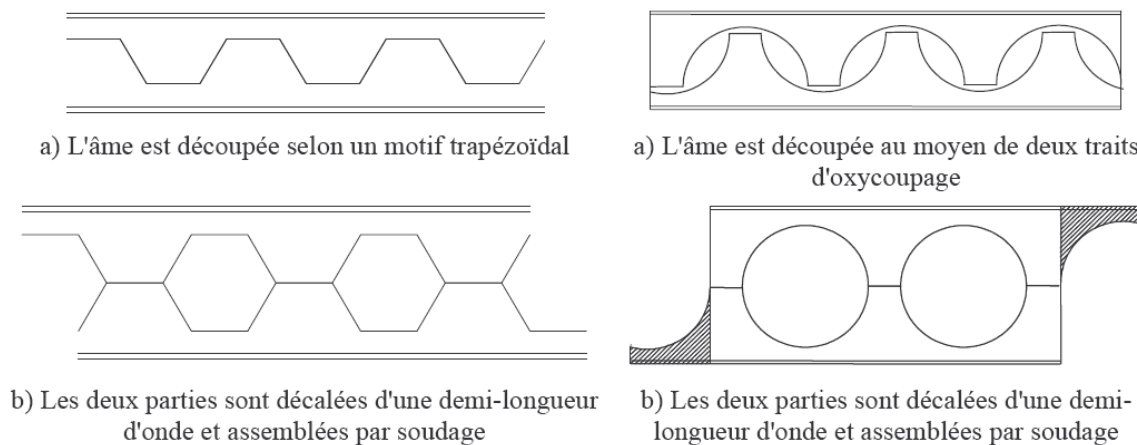


Figure I-11 Principes de réalisation des poutres alvéolaires (à gauche) et cellulaire (à droite) [DUR, 09]

Les poutres alvéolaires ont évolué vers des ouvertures circulaires appelées poutres cellulaires. Ces poutres sont élaborées suivant le même principe que les alvéolaires mais avec deux traits de découpe pour la réalisation (voir **Figure I-11**). Cette forme d'ouverture permet le passage de services légèrement plus grands et évite la concentration de contraintes observées au niveau des coins de l'ouverture hexagonale. Leur aspect esthétique les rend populaires auprès des architectes. Les modes de ruine spécifiques à ce type de poutre sont la formation de rotule par flexion Vierendeel et une instabilité locale du montant intermédiaire (voir **Figure I-12**).

La variation de moment le long de la poutre implique un différentiel d'efforts axiaux dans les membrures, entre les Tés de deux ouvertures successives, qui est équilibré par un effort de cisaillement horizontal dans l'âme. Ce cisaillement horizontal génère des contraintes de compression dans les parois autour de l'ouverture, ce qui peut créer une instabilité locale du montant intermédiaire. Plusieurs études expérimentales ont été menées pour analyser les modes de ruine spécifiques générés par la présence des ouvertures d'âme et en particulier le flambement du montant d'âme (**Figure I-12**) [BIT, 06]. D'autres études expérimentales ont été menées en situation d'incendie (ou hautes températures) [BAI, 04], avec notamment une étude sur le flambement du montant et l'influence de hautes températures sur la représentativité des modèles analytiques développés [NAD, 07] (**Figure I-13**).

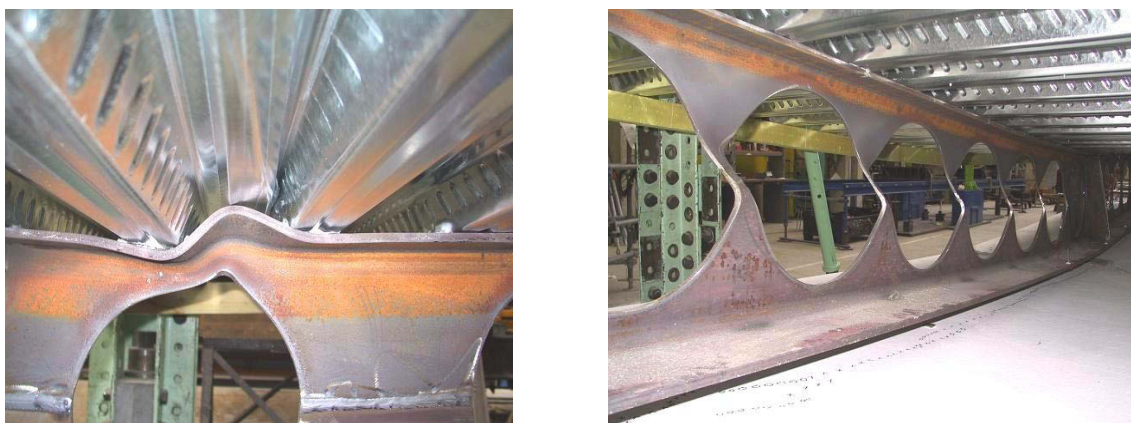


Figure I-12 Modes de ruine de poutres mixtes cellulaires avec une ruine par flexion Vierendeel (gauche) flambement du montant (droite)



Figure I-13 Ruine par flambement du montant lors d'essais à hautes températures [NAD, 07]

La principale différence de ce type de poutre avec les poutres à ouvertures d'âme isolées est l'interaction entre ouvertures avec un comportement mécanique proche de celui d'une poutre échelle. En effet les ouvertures sont séparées par un montant soumis aux efforts relatifs à la présence des ouvertures adjacentes. Ainsi, les approches de calcul des ouvertures isolées nécessitent d'être complétées par des critères qui tiennent compte de l'interaction entre ouvertures. Les paragraphes suivants présentent brièvement les résultats des études expérimentales et numériques récentes menées sur les poutres cellulaires et présentent les modèles théoriques utilisés pour représenter le comportement à l'état limite ultime des poutres à ouvertures multiples.

4.1. Etudes expérimentales et numériques des poutres cellulaires

Plusieurs études expérimentales et numériques ont été menées sur les poutres cellulaires. Les modèles numériques se basent principalement sur les éléments finis de type coques [HAG, 09], [EHA, 12], [SOL, 12], [LIU, 03]. Leurs travaux ont permis de donner des éléments d'analyses des principaux modes de ruines inhérents aux poutres cellulaires qui sont la formation de rotule par flexion Vierendeel et le flambement du montant intermédiaire (en supposant les poutres maintenues latéralement contre le déversement global). Ces études numériques ont permis de mettre en avant

le fait que des modèles qui utilisent des éléments coques représentent fidèlement le comportement complexe de ces poutres, en particulier les phénomènes liés aux instabilités locales, tout en optimisant les ressources en termes de calcul par les logiciels éléments finis.

D'autres auteurs ont proposé des études expérimentales et numériques sur des configurations plus complexes telles que la situation d'incendie [NAD, 07], [NAI, 11] ou l'assemblage par boulonnage [HOFF, 12]. Le deuxième cas met en avant une problématique importante des poutres cellulaires non traitée dans le présent document et qui concerne leurs assemblages sur les poteaux adjacents. D'autres travaux récents ont été publiés sur l'influence des formes d'ouvertures innovantes et en particulier l'impact sur la distribution des contraintes génératrices d'instabilité (ou de modes de ruine spécifiques). Ces études seront brièvement résumées en fin de partie. [TSA, 11].

Un nombre important d'études expérimentales puis numériques ont pu être menées sur les poutres alvéolaires et cellulaires afin de déceler leurs modes de ruine et de comprendre comment se répartissent les efforts autour des ouvertures. En vue de développer des règles de calcul pouvant s'intégrer dans une norme, tel que l'Eurocode, plusieurs modèles analytiques ont été développés pour représenter la résistance ultime de ces poutres. Tous les auteurs s'accordent sur le fait qu'une poutre à ouvertures multiple peut être représentée d'un point de vue théorique par une poutre échelle. Les paragraphes suivants visent à étudier cette représentation et donnent les règles de calcul tirées des derniers travaux de recherches pour déterminer la résistance des poutres cellulaires vis-à-vis des principaux modes de ruine.

4.2. Poutre cellulaire représentée par une poutre échelle

La plupart des études réalisées sur les poutres cellulaires les ont assimilées à des poutres échelles. La présence de multiples ouvertures larges implique une résistance au cisaillement du panneau d'âme (entre deux montants) qui tend vers zéro, ne pouvant alors fonctionner que comme un cadre. C'est pourquoi la théorie des poutres Vierendeel s'applique bien à l'étude des poutres avec grandes ouvertures réparties dans l'âme le long de la poutre (voir **Figure I-14**).

Le mécanisme de flexion Vierendeel autour des ouvertures a déjà été appliqué aux ouvertures isolées (voir §4.2). Ce modèle peut donc être repris pour la vérification des ouvertures régulièrement réparties. [BIT, 04].

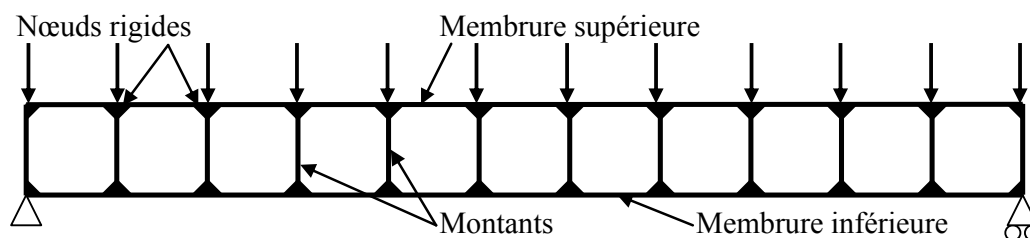


Figure I-14 Poutre Vierendeel

Ce type de poutre a comme particularité d'avoir des points d'inflexion au milieu des membrures et montants si les charges sont appliquées aux nœuds. Une simple modélisation sur le logiciel de calcul de structure « Robot » permet d'illustrer cette hypothèse. La **Figure I-15** montre les diagrammes de moment fléchissant sur les membrures d'une poutre échelle appuyée aux deux extrémités et chargée aux nœuds.

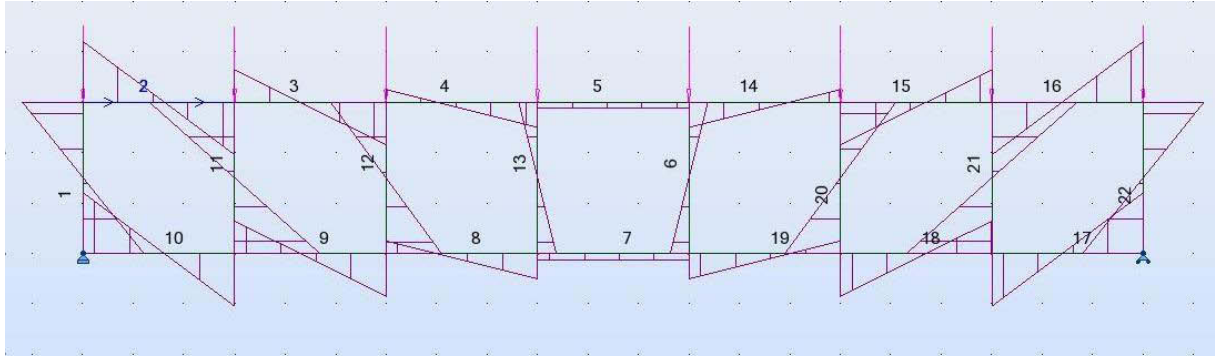


Figure I-15 Moments fléchissant d'une poutre échelle avec charges nodales obtenus par Robot

Les diagrammes décrits à la **Figure I-15**, dans les zones à fort cisaillement, sont bitriangulaires et ont un point d'inflexion au milieu de chaque membrure. Ainsi, l'hypothèse de considérer une articulation au milieu de chaque membrure est réaliste. Cette hypothèse permet de représenter le moment global au droit d'une ouverture par des efforts axiaux de compression et traction dans les membrures supérieure et inférieure de l'ouverture.

Plusieurs études ont montré que la modélisation d'une poutre cellulaire par une poutre échelle est cohérente et donne des résultats fiables. [KOL, 64] [BIT, 04], [BIT, 06], [CHU, 01], [LAW, 06], [LIU, 03], [MAN, 09-2], [TSA, 10], [VAS, 09-1].

De manière similaire aux poutres alvéolaires, plusieurs auteurs ont étudié les différents modes de ruine spécifiques aux poutres cellulaires [GAN, 11] [EHA, 12], qui sont résumés ci-après :

- cisaillement de la section perforée dû à la forte réduction d'âme au droit de l'ouverture,
- flexion globale, par traction ou compression des tés au droit de l'ouverture dans la zone la plus sollicitée,
- formation de rotules plastiques autour de l'ouverture par flexion Vierendeel,
- plastification d'un montant intermédiaire par cisaillement horizontal,
- flambement du montant intermédiaire,
- déversement global de la poutre dû à la faible rigidité torsionnelle des poutres cellulaires.

Ces différents modes de ruine sont détaillés successivement avec leurs modèles de calcul analytiques.

4.3. Stabilité élastique globale des poutres alvéolaires

Les recherches menées sur la stabilité élastique globale des poutres alvéolaires se sont intéressées aux différents modes d'instabilités globales, tels que le déversement global et le déversement avec distorsion de la section droite. Les codes actuels ne donnent pas de formulations précises pour traiter le cas de poutres alvéolaires. Plusieurs études expérimentales ou numériques ont cependant mis en évidence que les ouvertures ont une influence non négligeable sur la résistance au déversement des poutres.

Des études expérimentales ont été menées pour analyser la stabilité globale des poutres alvéolaires par Kerdal et Nethercot [KER, 84], puis par Zirakian et Showkati [ZIR, 06] (voir **Figure I-16**). Ensuite des études numériques menées par Mohebkah [MOH, 04][MOH, 05] sur le déversement des poutres alvéolaires montrent clairement l'augmentation de l'élancement des poutres par la présence des ouvertures dans l'âme.



Figure I-16 Montage et mise en évidence de la déformée hors plan par déversement global [ZIR, 06]

Peu d'études traitent le déversement avec distorsion de l'âme des sections des poutres alvéolaires. Les principales études expérimentales sur ce mode de ruine peuvent être attribuées à Zirakian et Showkati [ZIR, 06]. Plusieurs études numériques ont suivi et ont alimenté les informations sur ce mode de ruine [EHA, 11], [SWE, 11]. Ces études numériques montrent que si les larges ouvertures sont suffisamment espacées, la distorsion de l'âme est limitée. Des modèles empiriques sont proposés pour le calcul de résistance au déversement global. Ils sont calibrés sur la base des résultats numériques. Cependant, le calcul analytique de la résistance au déversement des poutres avec ouvertures d'âme reste encore un grand champ d'investigation scientifique. En pratique, le déversement est limité en maintenant les poutres vis-à-vis du déversement et de la distorsion au travers de maintiens hors plan ou bracons.

Certains travaux se sont intéressés à l'optimisation des maintiens (rigidités et positions) [MOH, 05] [SHO, 12]. Les récentes études menées par Showkati et al. [SHO, 12] exposent un montage

expérimental original permettant d'évaluer l'efficacité d'un maintien élastique hors plan grâce à un ressort (ELBSB sur la **Figure I-17**) dont la rigidité peut être calibrée suivant les besoins.

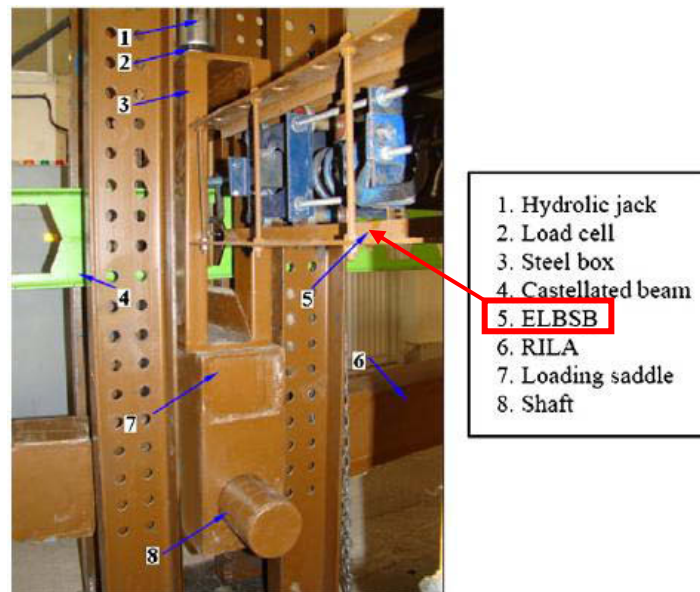


Figure I-17 Détail de la zone de chargement de la poutre alvéolaire avec le ressort servant de maintien élastique hors plan (ELBSB)[SHO, 12]

Ces études ont permis d'avoir les premières observations sur la stabilité globale des poutres alvéolaires et cellulaires. Les méthodes et conclusions proposées requièrent plus d'investigations afin d'améliorer la compréhension de ce phénomène complexe. Le principal document de référence pour le dimensionnement de ce type de poutre dans la littérature est la norme américaine AISC 360-05[AIS, 05].

Dans le cadre de la présente thèse, le déversement n'est pas considéré et des maintiens sont disposés tout au long de la poutre. En effet les études expérimentales et numériques réalisées ont montré que des maintiens ponctuels aux appuis et aux points de chargement suffisent à éviter le déversement et la distorsion de l'âme des poutres testées. Ainsi, l'étude se concentre sur la ruine locale des ouvertures.

4.4. Flexion Vierendeel

Un des principaux modes de ruine des poutres alvéolaires est la formation de rotules plastiques autour d'une ouverture par flexion Vierendeel observée pour la première fois par Altifillish en 1957 [DEM, 99]. Au droit d'une ouverture, le moment fléchissant global engendre un effort normal dans les membrures supérieure et inférieure. Celui-ci, cumulé avec l'effort tranchant, induit une flexion locale dans les membrures qui peut devenir dimensionnante pour une section inclinée de l'ordre de 20 à 25° (dans le cas général).

La méthode analytique présentée correspond à celle communément utilisée [ENV, 95], [BIT, 98] et [MAN, 09-2]. Au droit d'une ouverture, les efforts globaux N_{Ed} , V_{Ed} et M_{Ed} se répartissent entre la membrure supérieure et la membrure inférieure de la façon suivante (voir **Figure I-18**).

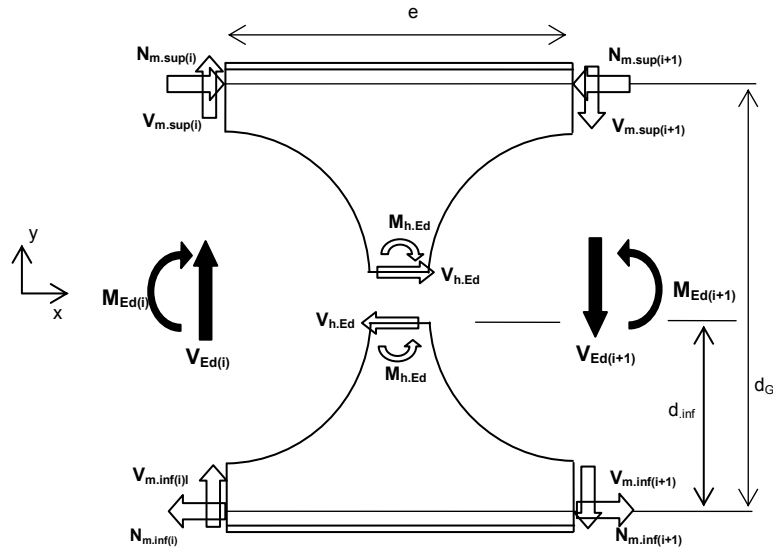


Figure I-18 Sollicitations dans les tés pour une poutre cellulaire [MAN, 09-2]

- pour la membrure inférieure,

$$N_{m.Ed.inf} = N_{Ed} \frac{A_{0.inf}}{A_{0.inf} + A_{0.sup}} - \frac{M_{Ed}}{z_{G.0.sup} + a_0 + z_{G.0.inf}} \quad \text{Equation I-14}$$

$$V_{m.Ed.inf} = V_{Ed} \frac{A_{v.0.inf}^\eta}{A_{v.0.inf}^\eta + A_{v.0.sup}^\eta} \quad \text{Equation I-15}$$

- pour la membrure supérieure,

$$N_{m.Ed.sup} = N_{Ed} \frac{A_{0.sup}}{A_{0.inf} + A_{0.sup}} + \frac{M_{Ed}}{z_{G.0.sup} + a_0 + z_{G.0.inf}} \quad \text{Equation I-16}$$

$$V_{m.Ed.sup} = V_{Ed} \frac{A_{v.0.sup}^\eta}{A_{v.0.inf}^\eta + A_{v.0.sup}^\eta} \quad \text{Equation I-17}$$

Avec :

- $\eta = 1 / (9,48 - 4,84 \alpha)$: facteur numérique de répartition de l'effort tranchant entre les membrures supérieures et inférieures. **[BIT, 06]**
- A_0 , $A_{v,0}$ et $z_{G,0}$ sont les caractéristiques des sections d'une membrure pour un angle d'inclinaison de 0° .
 - A_0 : aire de la section,
 - $A_{v,0}$: aire de cisaillement,
 - d_G : distance entre les centres de gravité.
 - $I_{y,0}$: moment d'inertie de flexion.
 - α : rapport de forme de l'ouverture = $1+w/a_0$

La résistance de chaque section inclinée d'un angle ϕ est vérifiée en faisant varier cet angle de $-\phi_{\max}$ à $+\phi_{\max}$ par incrément de 1° à 5° (voir **Figure I-9**). Cependant, afin d'alléger les calculs à la main, il est possible d'utiliser l'hypothèse simplificatrice émise par Redwood, d'une ouverture rectangulaire équivalente de largeur $0,45 \times a_0$. Cela correspondrait à établir la vérification pour une inclinaison de section de l'ordre de $26,5^\circ$, angle qui correspond approximativement au cas général. Mais cette simplification peut s'avérer imprécise pour certaines configurations d'ouvertures et de chargement. **[LAW, 06]**

*Remarque: Il a été constaté que dans les cas des poutres cellulaires non symétriques, la répartition de l'effort tranchant au droit de l'ouverture ne se fait pas exactement au prorata des aires de cisaillement des deux membrures. C'est pourquoi plusieurs études numériques ont été menées pour calibrer l'exposant η . **[BIT, 06]***

4.5. Résistance au cisaillement du montant

La présence d'ouvertures multiples rapprochées implique des interactions d'efforts entre ouvertures, notamment au niveau des montants intermédiaires. Cette interaction peut être illustrée principalement au travers de la présence d'un effort de cisaillement horizontal dans le montant qui équilibre le différentiel d'efforts axiaux entre deux ouvertures. Cet effort de cisaillement peut induire une instabilité par flexion du montant au niveau d'une section critique, que l'on détaillera dans le prochain paragraphe. Cependant, certaines configurations de poutres cellulaires peuvent avoir des largeurs de montant suffisantes pour éviter les phénomènes d'instabilité. Dans ce cas, la ruine peut se produire par plastification du montant sous contraintes de cisaillement horizontal. Le critère de résistance se vérifie donc comme un critère de plastification :

$$V_{h,Ed} < V_{h,Rd}$$

Equation I-18

Avec :

- $V_{h,Rd} = \frac{w t_w f_y}{\sqrt{3} \gamma_{M0}}$
- w : largeur du montant intermédiaire
- $V_{h,Ed} = N_{\text{sup},i+1} - N_{\text{sup},i}$ (voir **Figure I-18**).

Dans le cas de poutres non-symétriques, avec membrure supérieure différente de la membrure inférieure, la valeur maximale des critères calculés pour la partie supérieure et pour la partie inférieure est retenue. Ce cas est principalement rencontré pour des poutres mixtes où la membrure supérieure est soulagée par la présence de la dalle en béton.

4.6. Flambement du montant [BIT, 06]

Le flambement du montant est une instabilité locale qui a été étudiée expérimentalement pour la première fois par Sherbourne en 1966 ([DEM, 99], [TSA, 10]) puis Halleux en 1967 et Bazile et Texier en 1968. La forme en double courbure hors plan du montant est caractéristique de cette instabilité (voir **Figure I-19**).



Figure I-19 Double courbure du montant intermédiaire interprétée comme le flambement du montant

Le montant est soumis à de la flexion. Le diagramme de flexion est considéré linéaire, passant par un point d'inflexion au milieu du montant (dans les cas de poutre symétrique). Cette répartition d'effort suit celle obtenue pour une poutre échelle (Vierendeel) avec ROBOT (voir **Figure I-15**).

Par conséquent, comme pour les membrures, la flexion locale du montant est induite par l'effort tranchant horizontal :

$$M_{c,Ed} = V_{h,Ed} \times y - M_{h,Ed} \quad \text{Equation I-19}$$

Avec :

- y : distance verticale de la section du montant étudiée à partir du milieu du montant,
- $M_{h,Ed}$: Moment induit par la possible dissymétrie de la poutre, nul dans le cas de poutre symétrique. [BIT, 06], [MAN, 09-1], [DUR, 09]

L'instabilité du montant apparaît au niveau d'une section critique à une distance $y = d_w$ du milieu (voir **Figure I-20**). Le modèle de calcul se base sur des observations expérimentales et près de 100 simulations numériques. [BIT, 06]

Le modèle de référence définissait une position de section critique à $0,45a_0$, ce qui ne tient pas compte de la largeur des montants.

Or, d'après les observations effectuées et des calculs numériques, la zone d'instabilité du montant dépend de la largeur du montant. En effet, plus le montant est faible, plus la section critique est proche de la ligne de soudure des membrures ; inversement, plus le montant est large, plus la section critique s'éloigne de cette ligne.

De plus, ces observations ont montré que l'effort normal global dans la poutre, et par conséquent les membrures, a une influence sur l'instabilité des montants :

- Une membrure comprimée tend à favoriser l'instabilité
- Une membrure tendue retarde l'instabilité

Ainsi il peut être observé une antisymétrie de la déformée du montant. La première étape de la vérification consiste à déterminer la position d_w de la section critique du montant intermédiaire (**Figure I-20**).

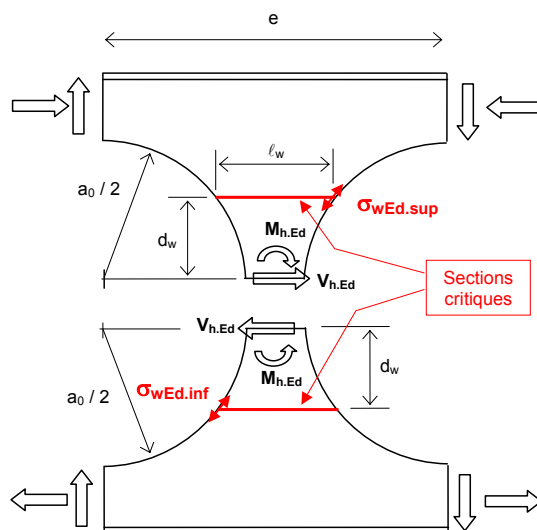


Figure I-20 Vérification de la stabilité d'un montant intermédiaire

La contrainte de bord libre se calcule au niveau de la section critique. Elle est ensuite comparée à la contrainte critique de flambement du montant tel que:

$$\sigma_{wEd} \leq K \sigma_{wRd}$$

Equation I-20

- σ_{wEd} est la contrainte principale de compression dans le demi-montant étudié. Cette contrainte est calculée dans la section critique de la partie vérifiée, au droit de l'ouverture où la compression est maximale (voir **Figure I-20**)
- σ_{wRd} est la contrainte principale résistante (affectée d'un facteur de réserve postcritique, qui prend en compte la ruine par mécanisme après l'apparition du flambement local d'un montant).
- κ : facteur de réserve post-critique. Il exprime la réserve procurée par les membrures au droit des ouvertures au-delà de l'apparition de l'instabilité des montants.

Pour plus de précision sur la détermination des contraintes sollicitantes et résistantes il est préconisé de se référer aux documents **[BIT, 06]**, **[MAN, 09-2]** et **[DUR, 09]**. Lawson s'est intéressé à développer un modèle de calcul simplifié pour le flambement du montant intermédiaire, le modèle proposé permet de tenir compte des éventuelles excentricités d'ouvertures **[LAW, 06]** **[VEL, 06]**. Son modèle est basé sur la courbe de flambement « c » de l'Eurocode 3. Il repose sur des hypothèses simplificatrices plus fortes et fournit des résultats assez conservatifs. **[WON, 09]**

5. POUTRE A OUVERTURE D'AME EN CONSTRUCTION MIXTE

5.1. Introduction **[BIT, 01]** **[CHU, 01-2]**

Les poutres mixtes sont constituées d'un profilé en acier et d'une dalle en béton qui est connectée au profilé au moyen de goujons qui travaillent en cisaillement. La dalle en béton est en général une dalle mixte, mais il existe aussi des systèmes utilisant des éléments en béton préfabriqués. La résistance à la flexion ainsi que la rigidité flexionnelle sont donc augmentées de 50 à 100% par rapport à celle d'un profilé en acier seul.

Plusieurs guides ont déjà été élaborés pour le dimensionnement de poutres cellulaires en acier seul. Ces guides ont permis l'établissement d'une norme européenne de dimensionnement, l'Annexe N de la version ENV des Eurocodes. En revanche, ce n'est pas le cas des poutres alvéolaires mixtes. En effet aucun règlement européen n'a encore été proposé pour le dimensionnement de telles poutres. **[LAW, 06]**



Figure I-21 Flexion Vierendeel dans l'essai d'une ouverture de grande dimension avec raidisseurs horizontaux

Darwin et Clawson ont été parmi les premiers à adapter au mixte les modèles de calcul de Redwood sur les poutres à acier seul. Leurs travaux ont permis d'intégrer la dalle dans la résistance au cisaillement de la poutre mixte. Puis Lawson et al. ont développé les modèles basés sur l'analyse des efforts locaux autour d'une ouverture. [LAW, 06] et [VEL, 06]

Une poutre mixte possède en général une semelle supérieure en béton très résistante et, par conséquent, la semelle supérieure en acier n'a pas besoin d'être plus importante que ce qui est exigé pour la phase de construction. Ceci peut être facilement exploité avec les poutres reconstituées mais cela est également possible avec les poutres cellulaires. La moitié supérieure et la moitié inférieure peuvent être prises dans des profils différents. Dans les poutres mixtes à âmes ajourées, l'action mixte est favorable pour la flexion Vierendeel car le profil en Té supérieur est renforcé par la dalle en béton. Cet effet est le plus prononcé dans l'angle où le béton est comprimé, mais le développement de la compression dans le béton est en général limité par le degré de connexion de la dalle. Cela signifie que la totalité de la résistance à la compression de la dalle ne peut être exploitée.

Si l'ouverture est très grande comme illustré à la **Figure I-21**, la résistance au cisaillement est sévèrement limitée par la flexion Vierendeel. Une mesure efficace consiste à prévoir des raidisseurs horizontaux au-dessus et en-dessous de l'ouverture. Ces raidisseurs augmentent de manière importante la résistance en flexion des sections en Té et, par conséquent, la résistance au cisaillement. En même temps, la compression verticale dans l'âme augmente et il peut s'avérer nécessaire d'ajouter des raidisseurs verticaux pour éviter l'instabilité locale de l'âme illustrée dans la **Figure I-22**.

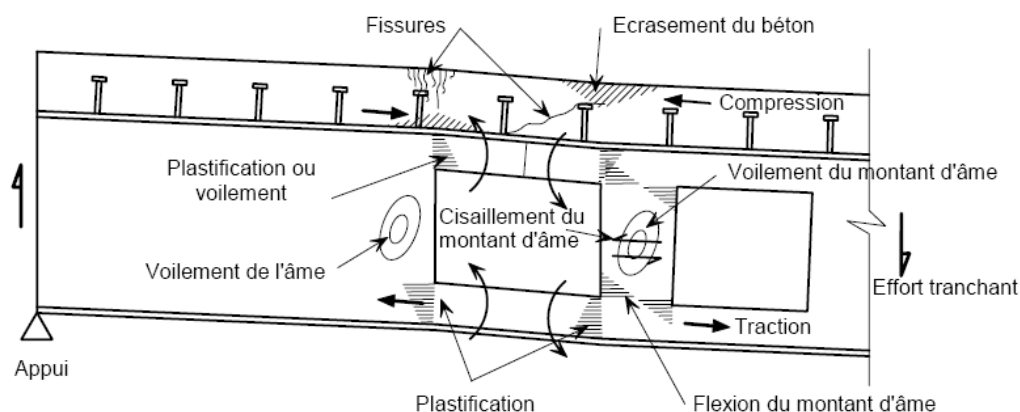


Figure I-22 Modes de ruine au niveau d'ouvertures de grandes dimensions [VEL, 06]

Les principaux modes de ruine inhérents aux poutres mixtes à ouvertures d'âme sont similaires à ceux d'une poutre en acier seul. Le voilement local de l'âme en bord d'ouverture se détermine à partir de la classification de l'ouverture. Cette classification peut reprendre celle proposée par l'Annexe N décrite précédemment. Celle-ci est en effet développée au départ en considérant les hypothèses d'une poutre mixte, pour laquelle on suppose la semelle supérieure maintenue latéralement par la dalle.

La flexion globale est reprise par la traction de la membrure inférieure et la compression de la dalle de béton. Cette compression est limitée par les efforts longitudinaux développés par les connecteurs depuis l'appui jusqu'au point concerné. Lorsque les ouvertures sont placées trop près des appuis, la force développée par les goudjons est limitée. De la même manière, l'effort de compression se développe aussi dans la membrure supérieure acier de la poutre (du fait de la connexion partielle).

De plus des études expérimentales ont été menées dans le cadre d'un projet de recherche européen [LAW, 06] et [VEL, 06] pour travailler sur le développement d'une action mixte locale au niveau des ouvertures proches des appuis ne bénéficiant donc que d'un degré partiel de connexion avec la dalle de béton. Les premiers modèles théoriques permettant de traiter cette particularité sont présentés ci-après.

5.2. Résistance au cisaillement

La résistance au cisaillement est fortement réduite par la présence de grandes ouvertures. Cependant, dans la majorité des poutres de grandes portées, l'exploitation de l'âme en cisaillement est relativement faible, ce qui explique la réserve de résistance au cisaillement.

$$V_{Rd} = (h - d_0)t_w \times f_y / \sqrt{3} + V_{c,Rd}$$

Equation I-21

- h : hauteur de la poutre,
- d₀ : hauteur de l'ouverture,

- h_w : hauteur de l'âme.
- $V_{c,Rd}$: résistance au cisaillement de la dalle en béton :

$$V_{c,Rd} = v_c \left(b_f + 2(h_s - h_p) \right) (h_s - h_p) \quad \text{Equation I-22}$$

- b_f : largeur de la semelle
- h_s : hauteur de la dalle
- h_p : hauteur de profil du bac

La résistance au cisaillement du béton, v_c , est tirée de l'EC2-1-1. Elle dépend du pourcentage d'armature dans la dalle et de paramètres définis au niveau national.

Les efforts tranchants supportés par les Tés dépendent de leurs résistances à la flexion Vierendeel (voir paragraphe suivant). En effet dans une poutre mixte, un cisaillement plus élevé est supporté par le Té supérieur qui agit de façon composée avec la dalle et qui subit des contraintes dues aux actions de flexion globale plus faibles que celles subies par le Té inférieur. Une partie de l'effort tranchant est également supportée par la dalle en béton.

Comme il a été présenté précédemment, la flexion Vierendeel est due à la transmission du cisaillement autour de l'ouverture. On a pu voir que ce transfert était équilibré par la formation de rotules plastiques aux 4 coins de l'ouverture induites par des efforts locaux de flexion. De plus, du côté du moment le plus élevé de l'ouverture⁴, une action composite apparaît entre la membrure acier supérieure et la dalle de béton. L'amplitude de cette action dépend directement du nombre de connecteurs situés au-dessus de l'ouverture. En général cette action mixte locale augmente de manière conséquente la résistance à l'effet Vierendeel. Ainsi, de plus longues ouvertures peuvent être utilisées en mixte plutôt qu'en acier seul.

5.3. Action mixte locale

Il convient que la somme des résistances à la flexion Vierendeel soit supérieure au moment Vierendeel appliqué donné par $V \times L_0$, où L_0 est la longueur efficace de l'ouverture et V , l'effort tranchant global sollicitant. Pour les ouvertures circulaires, la longueur efficace a été choisie égale à $0,45 \times d_0$, avec d_0 le diamètre de l'ouverture. Cette simplification dévie de l'approche standard de vérification du quart d'ouverture en incrément de sections angulaires. Cependant la méthode proposée ici est plus simple à mener à la main et peut être appliquée à plusieurs types d'ouvertures. Enfin, le principal avantage de cette méthode est d'établir non pas l'équilibre d'un quart d'ouverture, mais celui de l'ouverture globale. Par conséquent il permet d'inclure l'effet de l'action mixte locale.

[LAW, 06]

⁴ Ce côté correspond au bord de l'ouverture le plus proche de la mi-travée pour une poutre simple sous charge uniforme.

L'action mixte locale est directement liée au nombre de connecteurs au-dessus de l'ouverture. Il est cependant nécessaire de tenir compte d'un coefficient réducteur de cette composante afin de considérer l'effet néfaste de la flexibilité de l'ouverture au cisaillement.

En effet, cette flexibilité entraînant une augmentation locale de la flèche au niveau de l'ouverture, réduit l'effet favorable de l'action mixte. La résistance supplémentaire apportée par l'action mixte peut être calculée comme étant :

$$M_{vc,Rd} = \Delta N_{c,0}(h_s + y_{et} - 0,5y_c)k_l \quad \text{Equation I-23}$$

Où:

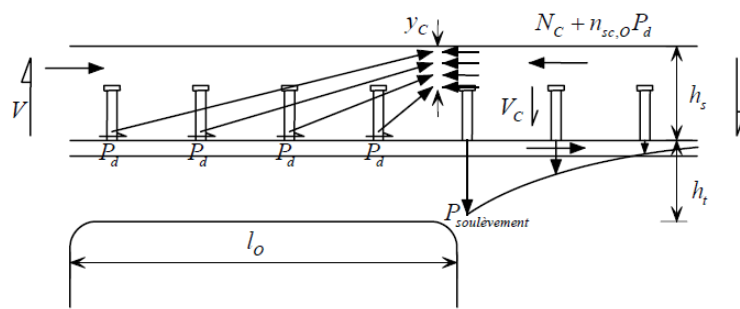
- y_{et} : distance de l'axe neutre élastique du Té au bord extérieur de la semelle (on peut prendre $y_{et} = t_f$ comme première approche),
- y_c : hauteur de béton comprimé,
- $\Delta N_{c,0}$: effort de compression développé par les connecteurs placés directement au-dessus de l'ouverture ;

$$\Delta N_{c,0} = n_{sc,0}P_d \quad \text{Equation I-24}$$

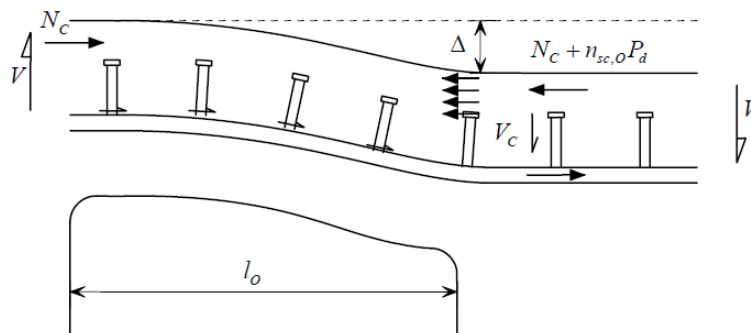
Avec :

- $n_{sc,0}$: nombre de goujons connecteurs au-dessus de l'ouverture.
- P_d : effort résistant d'un connecteur au cisaillement.
- k_l : coefficient réducteur dû à la longueur de l'ouverture.

Le moment résistant supplémentaire déduit de cette action mixte s'ajoute à l'équilibre de l'ouverture rectangulaire comme décrit par l'**Equation I-27**. Les différentes actions présentées précédemment sont décrites à la **Figure I-23**.



(a) Action mixte au dessus d'une ouverture



(b) Effets de flexibilité au niveau d'une ouverture longue

Figure I-23 Effets locaux au niveau d'une ouverture dans une poutre mixte [VEL, 06]

5.4. Effets du second ordre

La résistance apportée par la dalle permet de pratiquer des ouvertures plus longues que celles couramment utilisées en acier seul. Cependant, agrandir la longueur d'une ouverture augmente localement la flexibilité de la poutre au niveau de l'ouverture. En raison de l'importante flexibilité au niveau d'une longue ouverture, il peut se produire des effets du second ordre. Ceux-ci sont provoqués par la compression de la dalle et augmentent le moment fléchissant local M_v . En effet le déplacement Δ observé du côté de l'ouverture de fort moment induit donc une seconde composante du moment Vierendeel :

$$M_v = V \times L_0 + N_c \times \Delta$$

Equation I-25

Avec :

- N_c : effort de compression agissant dans la dalle
- V : effort tranchant global au niveau de l'ouverture
- Δ : flèche nette au niveau de l'ouverture. (Voir **Figure I-23 (b)**)

A l'état limite ultime, il a été montré que l'on pouvait approximer ce déplacement tel que $\Delta = L_0^2 / (1000 \times h_t)$, ce qui correspond environ à 3 fois le déplacement à l'état limite de service,

signifiant bien l'impact de la plastification locale des sections en T. Cette flèche est bien évidemment fonction du rapport M/V et des dimensions de l'ouverture.

Cette augmentation du moment sollicitant peut aussi se retranscrire par la réduction de la résistance, c'est pourquoi un coefficient de réduction k_l a été introduit :

$$k_l = \left(1 - \frac{L_0}{25h_t}\right) \quad \text{Equation I-26}$$

Ce coefficient peut être négligé pour des ouvertures de longueur: $L_0 \leq 5h_t$

5.5. Résistance totale à la flexion Vierendeel

A partir des différents éléments traités précédemment, la résistance d'une large ouverture mixte à la flexion Vierendeel se décrit comme :

$$V \times L_0 + N_c \times \Delta \leq 2M_{sup,red} + 2M_{inf,red} + M_{vc,Rd} \quad \text{Equation I-27}$$

Avec :

- $M_{inf,red}$: résistance à la flexion du T inférieur, réduite par l'interaction avec l'effort tranchant et l'effort axial (interaction quadratique en plastique et linéaire en élastique, **Equation I-8** et **Equation I-9**).
- $M_{sup,red}$: résistance à la flexion du T supérieur, réduite par l'interaction avec l'effort tranchant et l'effort axial (interaction quadratique en plastique et linéaire en élastique).
- $M_{vc,Rd}$: résistance apportée par l'action mixte locale définie précédemment.

Ces méthodes de calcul de poutre munie d'ouverture en construction mixte ont été adaptées aux cas de poutres cellulaires. L'adaptation de ces travaux à la forme d'ouverture sinusoïdale ne fera pas l'objet de notre travail. En revanche, elles peuvent constituer des perspectives importantes.

Il s'agit dans le dernier paragraphe qui suit, de présenter la nouvelle forme d'ouverture récemment développée pour un nouveau type de poutre cellulaire : la poutre AngelinaTM, poutre à ouvertures sinusoïdales.

6. POUTRE ANGELINA™

6.1. Introduction

Une nouvelle forme de poutres cellulaires avec ouvertures sinusoïdales est apparue récemment dans les offres des fabricants (appelée Angelina™, Arcelor Mittal et Differdange S.A.). Peu d'études ont été menées visant à comprendre le comportement mécanique de ces poutres en vue d'optimiser la forme d'ouverture. Certains travaux numériques et expérimentaux sont menés sur des formes d'ouvertures variées [TSA, 10]. Elles ont permis d'analyser en particulier le flambement du montant intermédiaire en fonction des différentes formes d'ouvertures et de proposer une formule empirique de vérification de sa résistance [TSA, 11].

La **Figure I-24** montre des résultats numériques et expérimentaux de déformée ultime sur des échantillons de poutre cellulaire avec des formes d'ouvertures variant légèrement de la simple forme circulaire. Tsavdaridis étudie aussi bien le phénomène de flambement du montant que celui de la flexion Vierendeel pour ces diverses formes d'ouvertures. [TSA, 10], [TSA, 11]

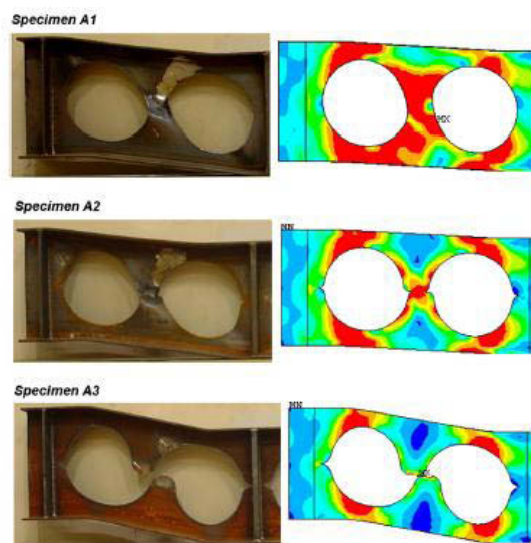


Figure I-24 Flambement des montants intermédiaires après essai et illustration des contraintes de von Mises [TSA, 11]

Tsavdaridis conclut sur l'étude de l'influence des formes d'ouverture dans la flexion Vierendeel : « Cependant, la forme de l'ouverture influence aussi de manière significative la position des rotules plastiques et la séquence de formation de ces rotules plastiques. » [TSA, 10]. Il est dit clairement que d'une part la forme joue sur la position de la section critique (rendant ainsi difficile de généraliser les comportements entre diverses ouvertures à un simple modèle d'ouverture rectangulaire) et d'autre part, il expose aussi l'existence d'un mécanisme de ruine spécifique. Ces remarques sont corroborées par d'autres auteurs, notamment Chung & al dans l'article [CHU, 01]. **Par conséquent, développer une nouvelle forme d'ouverture implique de nouvelles études afin de définir clairement son comportement.**

La poutre Angelina™ est réalisée à partir de poutrelles H ou I découpées dans l'âme suivant une ligne sinusoïdale et dont les deux parties sont décalées et soudées, la poutrelle Angelina™ ainsi obtenue peut avoir une hauteur égale à 1,5 fois la hauteur du profilé d'origine. En effet, à partir d'un ou de deux profilés de base, les poutrelles Angelina™ offrent une multitude de configurations géométriques, d'entraxes et d'ouvertures. Ce type de fabrication permet un ajustement précis de la hauteur de la poutrelle et réduit les chutes lors de la fabrication.

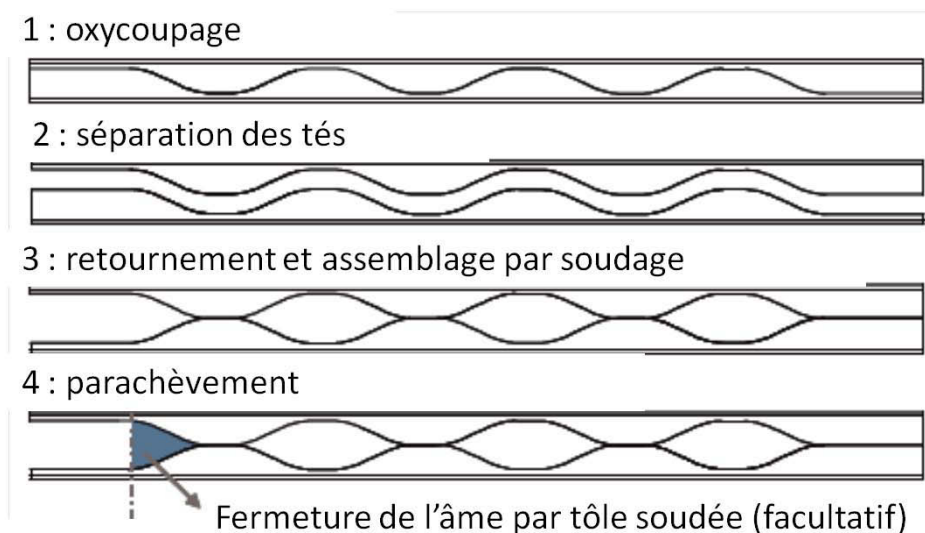


Figure I-25 Méthode de conception d'une poutre Angelina™

Ce nouveau type de poutre cellulaire intègre aisément dans les ouvertures, tous les types de fluides nécessaires et notamment des gaines de ventilation rectangulaires de grandes dimensions. Un des avantages de cette forme est qu'elle permet de donner la dimension souhaitée aux montants d'extrémités sans surcoûts. En effet, la zone proche des appuis représente la région de cisaillement maximal, critique pour les poutres à ouvertures d'âme. Enfin, outre ses avantages techniques, cette forme d'ouverture aux lignes arrondies donne à ces poutres une élégante expression architecturale.

6.2. Comportement mécanique

Le comportement mécanique d'une poutre Angelina peut s'apparenter à celui d'une poutre alvéolaire. En effet, l'ouverture sinusoïdale peut s'apparenter à un cercle ou à un hexagone suivant la valeur des paramètres définissant sa géométrie. Ainsi, le même schéma de fonctionnement de poutre échelle s'applique à cette poutre cellulaire.

La vérification autour d'une ouverture s'effectue en isolant une partie de celle-ci et en discrétisant les efforts globaux dans ses différents quarts, à partir de l'hypothèse du point d'inflexion au droit de l'ouverture. Ainsi, pour une ouverture soumise à un moment global et un effort tranchant global, les efforts se discrétisent tels que décrits par la Figure I-26.

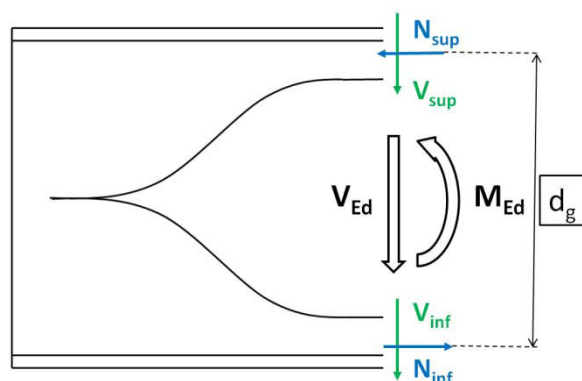


Figure I-26 Distribution des efforts globaux au droit d'une ouverture sinusoïdale

Chaque quart d'ouverture est ensuite vérifié en fonction des sollicitations qui lui sont attribuées. La **Figure I-27** présente l'exemple de sollicitations locales du quart d'ouverture de la membrure supérieure de l'ouverture illustrée **Figure I-26**.

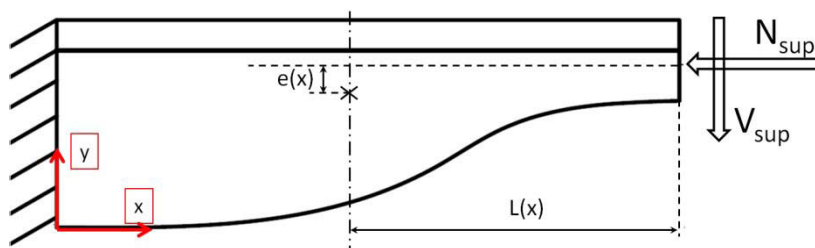


Figure I-27 Vérification d'une section en té située à l'abscisse x sur un quart d'ouverture

Cette forme d'ouverture qui se rapproche de la large ouverture peut être abordée avec les mêmes principes mécaniques. Les modes de ruine attendus pour ce genre de poutre sont:

- flexion Vierendeel,
- flexion globale,
- cisaillement global,
- cisaillement horizontal du montant.

Le flambement du montant intermédiaire, comme observé sur les poutres alvéolaires ou cellulaires, n'a que peu de chances d'apparaître pour le cas d'ouvertures sinusoïdales. En effet, les études expérimentales et numériques menées sur les poutres cellulaires ont montré que les cas de flambement de montant ne concernaient que les ouvertures peu espacées, avec une faible largeur de montant. Cependant, le processus de conception des poutres à ouvertures sinusoïdales implique un montant large ce qui écarte toute possibilité de flambement de montant à l'identique des poutres cellulaires.

Ce type de poutre propose des tailles d'ouvertures conséquentes, ce qui pose principalement le problème de résistance à la flexion Vierendeel induite par le transfert du cisaillement autour de l'ouverture. Néanmoins, la particularité de ce type d'ouverture par rapport à une ouverture

rectangulaire ou hexagonale est la variation de section le long de l'ouverture. En effet, le champ de contrainte n'est plus uniforme, comme dans le cas d'ouverture rectangulaire, mais suit le chemin de la sinusoïde, comme pour les poutres cellulaires où les contraintes suivent le chemin du cercle.

Par conséquent, dans le cas d'une poutre à ouvertures circulaires, la vérification des sections s'effectue autour de l'ouverture par incréments d'angle (1° est souvent choisi). Pour les ouvertures sinusoïdales, comme l'ouverture est plus allongée que le cercle, le choix s'est alors porté sur la vérification des sections verticales suivant leurs abscisses x par pas unitaire. La longueur des différents quarts d'ouverture rend complexe l'idée d'une approche par sections angulaires. Des études numériques sont menées dans le cadre de cette thèse pour analyser la distribution des contraintes principales autour de l'ouverture sinusoïdale et étudier la pertinence des différents choix faits sur le modèle analytique.

Chaque section est ainsi sollicitée en flexion composée et la résistance est vérifiée de manière incrémentale, telle que le moment appliqué $M_{V,Ed}$, dans une section en T donnée, soit inférieur à son moment résistant avec prise en compte de l'effort normal:

$$M_{V,Ed} = V_{sup} \cdot L(x) - N_{sup} \cdot e(x) \quad \text{Equation I-28}$$

$$e(x) = (y_{max0} - y_{max} + y_0 - y)$$

Avec :

- $L(x)$: distance entre le petit Té, situé sur la mi-longueur de l'ouverture, et la section du Té étudié (voir **Figure I-27**),
- $e(x)$: excentrement de N induit par le changement de position de l'axe neutre élastique entre le petit Té et le Té étudié de position x ,
- y_{max} : position du centre de gravité pour le Té étudié (voir **Figure I-27**),
- y_{max0} : correspond au y_{max} du petit Té situé à mi-longueur de l'ouverture,
- y : coordonnée de l'extrémité de l'âme, à l'abscisse considérée (voir **Figure I-27**),
- y_0 : Valeur de y pour la section du petit à l'extrémité du quart d'ouverture.

L'approche de calcul de résistance retenue dans cette étude, s'appuie sur la résistance des sections en Té comme pour les sections circulaires. Pour déterminer la résistance de ces sections, les démarches des Eurocodes sont retenues comme les définitions des classes de sections.

6.3. Classification des sections transversales

Après avoir déterminé les sollicitations dans les différentes sections en Té le long d'une ouverture, la résistance de ces sections est vérifiée dans chaque quart d'ouverture. Les résistances des différents Tés analysés sont calculées en s'inspirant des démarches de l'Eurocode 3. Celui-ci s'appuie sur la notion de classes de sections pour calculer les résistances élastique ou plastique sous des sollicitations de type flexion ou flexion composée. Cependant, dans l'Eurocode, les parois à bord libre sont celles des semelles des poutres en I ou H ou des âmes des sections en T issues de profilés

laminés à chaud. Ainsi, adapter directement le critère de l'Eurocode revient à classer les parois d'âme le long de l'ouverture comme des parois en console avec un bord attaché à la semelle et un bord libre du côté de l'ouverture (voir **Figure I-30**).

En première approche, l'adaptation des classifications fournies par la norme européenne [EC3-1-1] est décrite à la **Figure I-28**. Ainsi, le quart d'ouverture est parcouru du plus petit Té, au milieu de l'ouverture, jusqu'au Té le plus grand situé près du montant symbolisé par des hachures sur la **Figure I-27**. Cependant, sous moment positif (fibres du bord libre comprimées), les sections se retrouvent rapidement de classe 4 (**Figure I-28**).

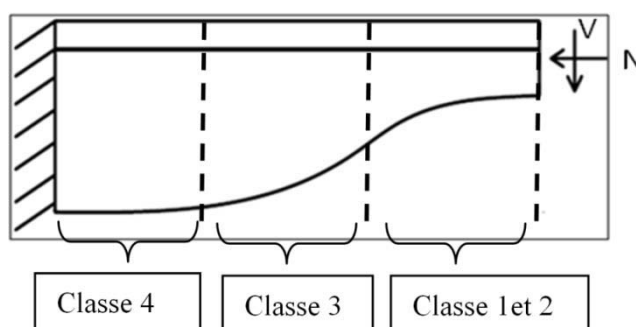


Figure I-28 Classification de l'âme du quart d'ouverture

Il apparaît que la simple application des approches de l'Eurocode au quart d'ouverture considéré peut impliquer une forte sous-estimation de la résistance réelle. En effet, dans cette classification, le maintien hors plan probablement assuré par le montant intermédiaire (représenté par des hachures sur la **Figure I-28**) n'est pas pris en compte et chaque té est considéré maintenu seulement au niveau de la semelle de la poutre.

Car si les hachures représentent le montant adjacent, il est possible d'imaginer que celui-ci apporte une certaine rigidité hors plan aux sections qui lui sont proches.

Pour illustrer ce propos, il est proposé d'étudier analytiquement un modèle de quart d'ouverture sollicité en flexion simple. La **Figure I-29** présente le diagramme de moments fléchissant et résistant ainsi obtenus.

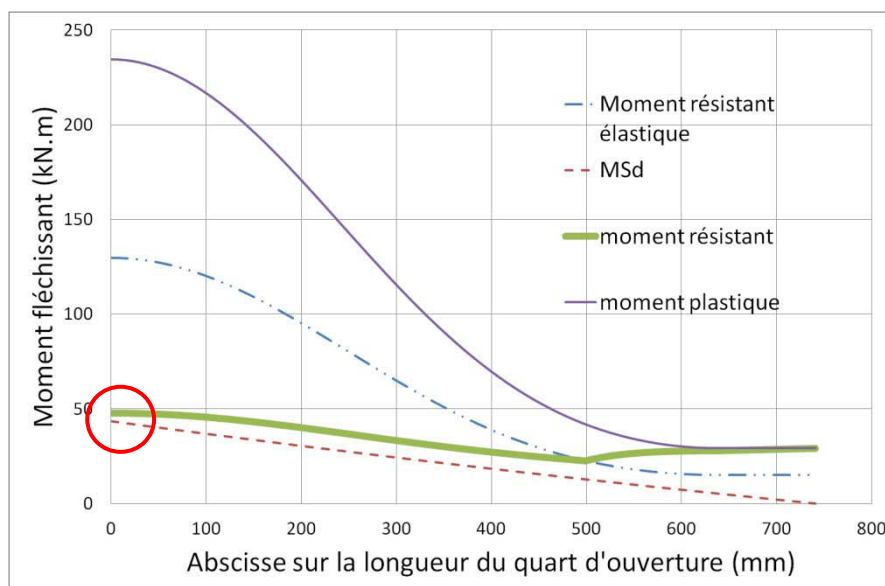


Figure I-29 Evolution des moments sollicitant et résistant pour un quart d'ouverture en flexion simple

Cette figure permet d'observer l'évolution du moment résistant, élastique ou plastique selon la classe de section, en fonction de la position de la section étudiée sur la longueur du quart d'ouverture soumis à une flexion simple (d'où la linéarité du moment sollicitant). Pour une abscisse⁵ inférieure à $x = 490\text{mm}$, le moment résistant devient inférieur au moment résistant élastique des sections car les sections étudiées aux abscisses $x < 490\text{mm}$ sont de classe 4. Par conséquent, la section proche du montant, d'abscisse $x = 0$, a une résistance très faible avec un moment sollicitant maximal. Cette première observation analytique permet de mettre en avant l'erreur de la seule classification verticale des sections qui implique que la section adjacente au montant d'âme est la section critique par voilement local.

En réalité, le calcul aux éléments finis, exposé dans la suite du rapport, met en évidence le fait que le voilement ne se produit jamais au niveau de la section de hauteur maximale mais pour des sections plus éloignées du montant [VAS, 09-2]. Nous nous sommes donc orientés sur la redéfinition des résistances des sections en considérant au mieux le maintien apporté par le montant intermédiaire (voir PARTIE IV).

⁵ L'abscisse $x=750\text{ mm}$ correspond à la section du petit Té au droit de l'ouverture.

Classe	Paroi comprimée	Paroi fléchie et comprimée				
		Extrémité comprimée	Extrémité tendue			
Distribution des contraintes dans les parois (compression positive)						
1	$c/t \leq 9\varepsilon$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$			
2	$c/t \leq 10\varepsilon$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$			
Distribution des contraintes dans les parois (compression positive)						
3	$c/t \leq 14\varepsilon$	$c/t \leq 21\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$ Pour k_σ , voir l'EN 1993-1-5				
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	f_y (N/mm ²)	235	275	355	420	460
	ε	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71

Figure I-30 Classification d'une paroi en console suivant l'Eurocode 3 [EC3-1-1]

L'utilisation directe de la classification de l'EC3 (**Figure I-30**) s'avère trop conservatrice et peu représentative de la réalité. Des modèles ont été proposés de manière à fournir des résultats analytiques plus proches des résultats numériques. Ces modèles s'appuient, soit sur une combinaison de classification, soit sur l'adaptation d'un critère de classification d'ouverture donné dans la précédente version ENV des Eurocodes. Ces différents modèles sont présentés en quatrième partie de ce document avant de proposer une approche spécifique basée sur la prise en compte du maintien élastique fourni par le montant d'âme.

Enfin, un autre aspect du calcul de la résistance des sections mérite une amélioration. Il s'agit de l'interaction plastique Moment-Effort axial qui est peu considérée dans la littérature. En effet, il est souvent préconisé pour vérifier les sections en té soumises à une flexion composée, de considérer une interaction quadratique pour les cas de sections de classe inférieure à 3, sinon de considérer une interaction linéaire [ENV, 95], [VEL, 06] [CHU, 03] (voir **Equation I-8** et **Equation I-9**). Cependant, une forme quadratique d'interaction M-N pour des sections en Té n'est pas représentative de la réalité et peut s'avérer non sécuritaire dans certains cas ou souvent trop conservatrice. L'étude de l'interaction plastique M-N d'une section en Té est détaillée dans l'**Annexe B**, les principaux résultats théoriques sont donnés dans le paragraphe suivant.

6.4. Interaction plastique M-N d'une section en T

Le modèle de calcul, comme celui utilisé pour les poutres cellulaires, est un calcul d'interaction quadratique pour les sections de résistance plastique et linéaire pour les sections de résistance élastique.

Caractéristiques plastiques: $M_{N,pl,Rd} = M_{pl,Rd} \times [1 - (N/N_{pl})^2]$ **Equation I-29**

Caractéristiques élastiques: $M_{N,el,Rd} = M_{el,Rd} \times [1 - (N/N_{pl})]$ **Equation I-30**

La **Figure I-31** donne la comparaison entre les diagrammes d'interaction M-N quadratique et réel.

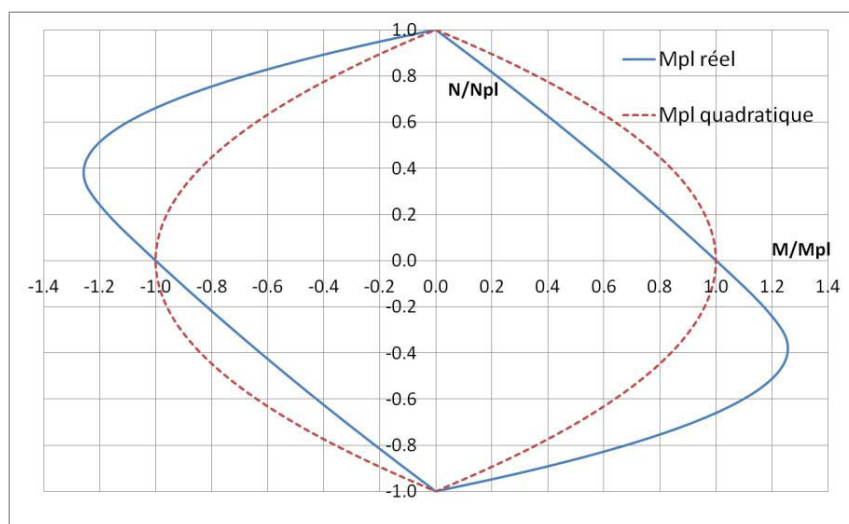


Figure I-31 Courbes d'interaction quadratique (en rouge), approximée pour un té (en bleu)

La **Figure I-31** montre que l'utilisation d'un modèle quadratique peut s'avérer mal adaptée aux cas de sections non symétriques comme les tés. En effet, suivant les configurations de sollicitations (signe de N et M), la courbe d'interaction peut se retrouver linéaire ou parabolique (avec un moment résistant final pouvant dépasser le moment plastique initial de la section). Tenir compte d'un modèle précis d'interaction M-N est donc primordial afin de développer un modèle analytique fiable et réaliste. Enfin l'**Annexe B** propose une adaptation du travail de Baptista ([BAP, 06-1], [BAP, 06-2], [BAP, 06-3]) sur l'interaction M-N de profilés non-symétriques afin de développer une formule simple d'utilisation permettant de donner le moment résistant plastique réel d'une section en T en flexion composée.

7. CONCLUSION

L'état de l'art sur les poutres cellulaires présenté dans cette première partie permet de donner les éléments de base visant à caractériser le comportement mécanique des poutres à larges ouvertures multiples. Il a été montré que les principaux modes de ruine spécifiques à la présence d'ouvertures circulaires ou autres, sont liés majoritairement au transfert de cisaillement autour des ouvertures. Cependant, la forme et la proximité des ouvertures d'une poutre alvéolaire entraînent quelques différences d'un point de vue théorique et pratique. La forme joue sur la position de la section critique. Ainsi, il est difficile de généraliser aux comportements de diverses ouvertures le modèle simple d'ouverture rectangulaire.

Plusieurs autres études expérimentales et numériques ont mis en évidence certains phénomènes locaux que ce soit sur des ouvertures rectangulaires ou sur des ouvertures à section variable telles que les ouvertures circulaires. La flexion Vierendeel notamment est plus complexe à caractériser d'un point de vue théorique sur une forme circulaire que sur une forme rectangulaire, du fait de la variation de la position de la section critique en fonction de la forme de l'ouverture. De nombreuses recherches ont été menées afin de proposer des modèles de calcul permettant de mieux définir la résistance de ces formes d'ouverture. **Ainsi, les méthodes permettant de traiter un même phénomène qui est la flexion Vierendeel se voient évoluer avec l'évolution des formes d'ouverture.** De ce fait, l'apparition d'une nouvelle forme de poutre cellulaire avec des ouvertures sinusoïdales donne lieu naturellement à de nouvelles recherches.

Cette forme sinusoïdale apporte une innovation architecturale et présente une nouvelle forme de ruine par flexion Vierendeel. En effet, la partie convexe de la forme sinusoïdale qui était concave pour le cercle donne lieu à des instabilités locales liées aux sollicitations de flexion Vierendeel [MAN, 09-1], [DUR, 12-1]. Cette forme d'instabilité est totalement nouvelle et correspond à la principale problématique autour de cette forme d'ouverture.

Les premières adaptations des modèles existants de calcul analytique ont montré quelques difficultés à représenter, de manière juste, la résistance de ces poutres et notamment la stabilité de la paroi sinusoïdale constituant l'ouverture. Dans le but de développer la compréhension du comportement mécanique de ce type de poutre, des essais destructifs sur trois poutres Angelina™ à grandes échelles ont été élaborés. Ces essais permettent de développer et valider un modèle numérique capable de représenter fidèlement le comportement mécanique de ces poutres. Ce modèle numérique représente un outil pour l'étude détaillée des modes de ruine et des distributions de contraintes autour des ouvertures sinusoïdales.

Notre objectif est de développer un nouveau modèle analytique pour calculer la résistance ultime de ces poutres. Chaque hypothèse sera justifiée soit d'un point de vue théorique soit au travers d'observations numériques.

PARTIE II -ETUDE COMPORTEMENTALE DES POUTRES CELLULAIRES A OUVERTURES SINUSOÏDALES -

- 1- Etudes expérimentales des poutres à ouvertures sinusoïdales
- 2- Etude numérique des poutres à ouvertures sinusoïdales
- 3- Conclusion

1. ETUDES EXPERIMENTALES DES POUTRES A OUVERTURES SINUSOÏDALES

1.1. Introduction

Dans la première partie, il a été montré que la forme de l'ouverture a un impact sur le fonctionnement mécanique des poutres cellulaires et en particulier sur leur mode de ruine. Dans le cadre du présent document, l'étude est portée sur les poutres à ouvertures sinusoïdales. En l'absence de données sur le comportement de ces poutres, des essais expérimentaux sont réalisés sur des poutres à l'échelle 1. Ils servent de base pour observer les modes de ruine spécifiques de ces poutres et à valider un modèle numérique le plus précis possible. L'observation expérimentale combinée à des études comportementales numériques aident à bien caractériser les modes de ruine de ces ouvertures, l'influence des paramètres géométriques d'ouverture sur le schéma de ruine et donnent les axes d'investigation pour adapter et améliorer les modèles analytiques existants.

Ces essais concernent trois poutres à grande échelle chargées en flexion quatre points (**Figure II-1**).

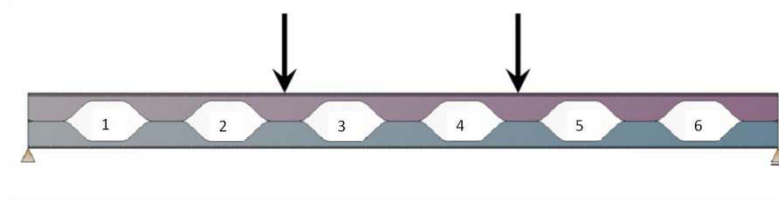


Figure II-1 Configuration de chargement des poutres testées expérimentalement

Les poutres testées sont équipées de plusieurs instruments de mesure. Pour mesurer les déplacements, des capteurs de type LVDT sont utilisés en parallèle avec des systèmes de mesure sans contact 3D (cibles et caméras). Pour observer l'évolution de l'état de déformation (et de contraintes) dans certaines zones autour des ouvertures, plusieurs jauges de déformation uni-axiales ou rosettes sont localisées autour des ouvertures 1 et 2 de la **Figure II-1**. Ces ouvertures représentent les zones de ruine potentielles pour les trois poutres. Ces mesures seront confrontées aux résultats de calcul d'un modèle éléments finis pour le valider.

Tout d'abord cette partie présente de manière synthétique le programme expérimental et le montage des essais. Puis elle présente le modèle numérique et enfin la comparaison des différents résultats validant l'outil numérique. Cette partie sera consacrée à l'étude détaillée numérique des poutres testées et des parties de l'ouverture prises isolément. L'analyse de quarts d'ouverture permet de critiquer les différentes hypothèses et approximations faites analytiquement pour mieux définir les points à traiter afin de développer un modèle analytique.

1.2. Programme expérimental

1.2.1. Caractéristiques des 3 poutres testées

Les essais sont effectués sur trois spécimens de poutre dénommées AS012, AS016 et AS018. Dans le but de couvrir une gamme la plus large possible d'ouvertures sinusoïdales, il a été choisi de tester trois configurations d'ouvertures extrêmes, ouverture standard (AS012), grande ouverture (AS016) et petite ouverture (AS018) [MAN, 09-1]. Les poutres AS012 et AS016 sont élaborées à partir d'un profilé IPE 450 tandis que la poutre AS018 est faite à partir d'un profilé IPE 400. Les modes de ruine attendus sont directement fonction de la forme de l'ouverture. Ainsi, dans le cas d'une grande ouverture il est plus probable d'obtenir la plastification de l'ouverture alors que, pour le cas de la petite ouverture, les parois comprimées seront plus sensibles à des phénomènes d'instabilité locale. Les jauges de déformation seront donc disposées de manières différentes pour les trois poutres en fonction des études numériques préliminaires. De plus les limites élastiques de chaque poutre ont été choisies afin de favoriser un mode de ruine plutôt qu'un autre. La **Figure II-2** et le **Tableau II-1** décrivent les paramètres géométriques et matériels nominaux de chaque poutre testée.

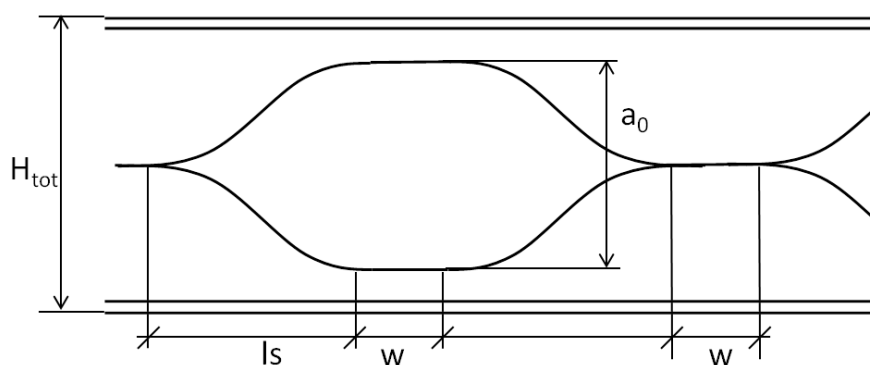


Figure II-2 Principaux paramètres géométriques d'une ouverture sinusoïdale

Poutre testée	AS012	AS016	AS018
Limite élastique (MPa)	460	235	460
Profilé originel	IPE 450		IPE 400
Hauteur du profilé : H_{ini} (mm)	450		400
Largeur de semelle : b (mm)	190		180
Epaisseur de semelle : t_f (mm)	14,6		13,5
Epaisseur d'âme : t_w (mm)	9,4		8,6
Rayon de raccordement : r (mm)	21		21
Hauteur finale : H_{tot} (mm)	675	735	507,5
Hauteur d'ouverture : a_0 (mm)	450	570	215
Longueur de sinusoïde : l_s (mm)	638	420	325
Largeur de montant : w (mm)	205	350	202
Nombre d'ouvertures		6	
Longueur d'ouverture: L_0 (mm)	1481	1190	852

Portée : P (entre appuis) (mm)	10500	9750	6700
Longueur totale de la poutre : L (mm)	10778	10028	6978

Tableau II-1 Caractéristiques géométriques et matérielles nominales des 3 poutres testées

Des mesures d'imperfections géométriques sont réalisées sur les trois poutres testées pour évaluer l'amplitude des défauts réels. Des éprouvettes de traction sont prélevées dans différentes parties des poutres testées pour obtenir les caractéristiques réelles des matériaux. Ainsi, les caractéristiques réelles, géométriques et matérielles, peuvent être utilisées dans le modèle numérique dans le cadre de la validation. Il a été observé que les caractéristiques géométriques et matérielles mesurées présentent certains écarts par rapport aux valeurs nominales.

1.2.2. Caractéristiques géométriques et matérielles

1.2.2.1. Caractéristiques de l'ouverture

Pour les trois poutres, les caractéristiques géométriques sont mesurées en plusieurs points sur la longueur de la poutre. L'écart maximum entre la valeur nominale et celle mesurée des différentes dimensions de l'ouverture reste inférieur à 5%. Le **Tableau II-2** montre un exemple de valeurs mesurées de hauteur (a_0) et longueur d'ouverture (L_0) pour la poutre AS012. La différence est calculée en considérant le rapport Δ tel que :

$$\Delta(\%) = \frac{(\text{valeur mesurée} - \text{valeur nominale})}{\text{valeur nominale}} \times 100$$

Ouverture	a_0 (mm)	Δ (%)	L_0 (mm)	Δ (%)
1	449	-0,22	1418	-4,25
2	450	0	1411	-4,73
3	451,5	0,33	1421	-4,05
4	449	-0,22	1423	-3,92
5	450	0	1425	-3,78
6	449,5	-0,11	1409	-4,86

Tableau II-2 Caractéristiques géométriques mesurées et écarts avec les valeurs nominales(%) pour la poutre AS012

Les valeurs négatives de Δ montrent que les dimensions de l'ouverture sont généralement plus faibles que les valeurs nominales. Les mesures faites sur les paramètres géométriques du profilé initial telles que l'épaisseur d'âme, l'épaisseur de semelle, la largeur de semelle montrent la même tendance avec ainsi des valeurs positives de Δ . Cependant, ces écarts restent suffisamment faibles pour être négligés dans le modèle numérique.

1.2.2.2. Imperfection initiale globale

Les imperfections initiales sont utilisées comme données d'entrée dans le modèle numérique pour les calculs en grands déplacements. En réalité la forme ainsi que l'amplitude de ces déformations initiales peuvent influencer sur le mode de ruine des parties comprimées de l'ouverture critique susceptibles de voiler [DUR, 12-1]. Dans les poutres en flexion 4 points, le déversement est

évitée par les maintiens latéraux disposés le long des poutres testées. Cependant, il reste nécessaire d'introduire ces imperfections dans le modèle numérique afin de s'assurer que les maintiens disposés sont suffisants. En effet, de nombreux essais effectués sur les poutres cellulaires ont eu des résultats inexploitable à cause de mauvais maintiens latéraux ne pouvant empêcher le déversement des poutres testées [DEM, 99] [TSA, 10].

Pour réaliser les mesures des imperfections géométriques hors plan, il a été choisi de prendre comme repère une ligne médiane tracée entre les deux milieux des semelles des sections extrêmes de la poutre. L'écart des milieux des semelles des autres sections sur la longueur de la poutre permet d'avoir une approximation de l'allure de la déformée initiale ainsi que de son amplitude. Un exemple de mesure est donné **Figure II-3**. La ligne médiane correspond à la ligne servant de repère formée par les milieux des semelles des deux extrémités de la poutre. Les points (+) symbolisent les positions des points de mesures par rapport à la ligne médiane, l'écart est exagéré afin d'illustrer l'allure de la déformée initiale.

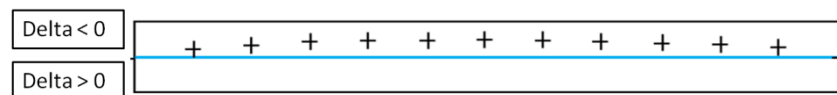


Figure II-3 Exemple d'imperfection initiale globale hors plan de la poutre AS012

La **Figure II-3** montre que l'imperfection initiale peut être approximée par un arc d'amplitude maximale de 11mm ce qui correspond à un ratio de $L/950$ (avec L : longueur de la poutre). Il a été choisi d'utiliser ces valeurs mesurées.

1.2.2.3. Imperfections géométriques locales initiales

Pour obtenir les imperfections géométriques locales initiales, les défauts de planéité de chaque montant intermédiaire sont mesurés. Cette imperfection influence directement le voilement local des parois comprimées autour de l'ouverture. La **Figure II-4** présente les points de « a » à « f » sur lesquels ont été mesurés les défauts de planéité de chaque montant intermédiaire. Les mesures ont été effectuées sur trois montants le long de la poutre. Ces mesures permettent, de la même façon que pour l'imperfection globale, d'identifier la forme et l'amplitude de l'imperfection.

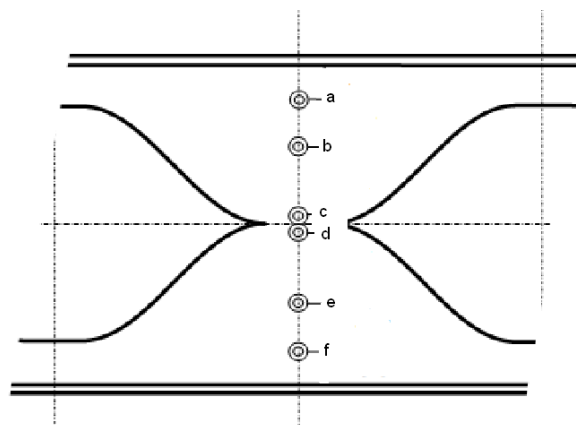


Figure II-4 Position des points de mesure pour l'imperfection hors plan du montant

Les mesures faites sur les montants intermédiaires affichent une imperfection initiale avec une forme en C et une amplitude maximale égale à $H/430$ (avec H , hauteur de la poutre finale). A noter que les Eurocodes préconisent, pour les calculs numériques en grands déplacements, une valeur maximale d'imperfection égale à $H/200$ **[EC3-1-5]** (cependant ces imperfections de l'eurocode intègre l'existence de contraintes résiduelles qui sont considérées par l'intermédiaire de ces imperfections initiales majorées). Le **Tableau II-3** donne les mesures effectuées sur la poutre AS012.

Montants n°	a	b	c	d	e	f
1	0	-0,20	-0,12	-1,06	-0,60	-0,18
3	-0,07	-0,74	-0,77	-0,97	-0,78	0,04
5	0,11	-0,70	-1,49	-2,02	-0,99	-0,05

Tableau II-3 Valeurs mesurées de l'imperfection locale hors plan (mm)

L'imperfection semble donc être identique sur toute la longueur de la poutre. La valeur maximale mesurée est celle considérée dans le modèle numérique.

1.2.2.4. Caractéristiques matérielles

Afin d'obtenir les valeurs réelles des limites élastiques et la courbe de comportement réelle de l'acier constituant chaque poutre, plusieurs essais de traction sont réalisés sur des éprouvettes prélevées dans l'âme des poutres. La **Figure II-5** donne un exemple de la courbe de traction d'un échantillon prélevé sur la poutre AS016 avec la courbe bi-linéaire équivalente utilisée dans la modélisation sur le logiciel d'éléments finis SAFIR. Les résultats de toutes les poutres sont résumés au **Tableau II-4**. Ce tableau donne la valeur de la limite élastique f_y mesurée, la valeur de la limite ultime f_u et la valeur du module d'écrouissage E' .

Remarque : Le module d'Young est difficile à obtenir car les déformations sont très faibles et le résultat est parasité par les éventuels glissements entre les mors et l'éprouvette. Pour cette raison nous avons choisi de considérer un module d'Young égal à 210 000 MPa pour toutes les poutres. Le module d'écrouissage en revanche est plus réaliste car il est calculé à partir de la déformation pour laquelle l'acier atteint sa limite élastique jusqu'à sa limite ultime. Comme les déformations plastiques ainsi que les charges sont plus grandes, l'influence d'éventuels glissements de l'éprouvette dans les mors de traction est moins importante.

Il a été choisi de considérer comme module d'écrouissage E' : la pente de la droite qui relie le premier point pour lequel l'acier atteint sa limite élastique (f_y) avec le point de limite ultime (f_u), voir **Figure II-5**. Il peut être constaté que les valeurs mesurées de limite élastique sont nettement plus grandes que les valeurs nominales notamment pour la poutre AS016 pour laquelle la valeur nominale est de 235 MPa.

Poutre	Limite Elastique f_y (MPa)	Limite ultime f_u (MPa)	Module d'écroutissage E' (MPa)
AS012	499	624	938,7
AS016	320	454	619
AS018	468	590	847

Tableau II-4 Valeurs mesurées des caractéristiques matérielles des trois poutres testées

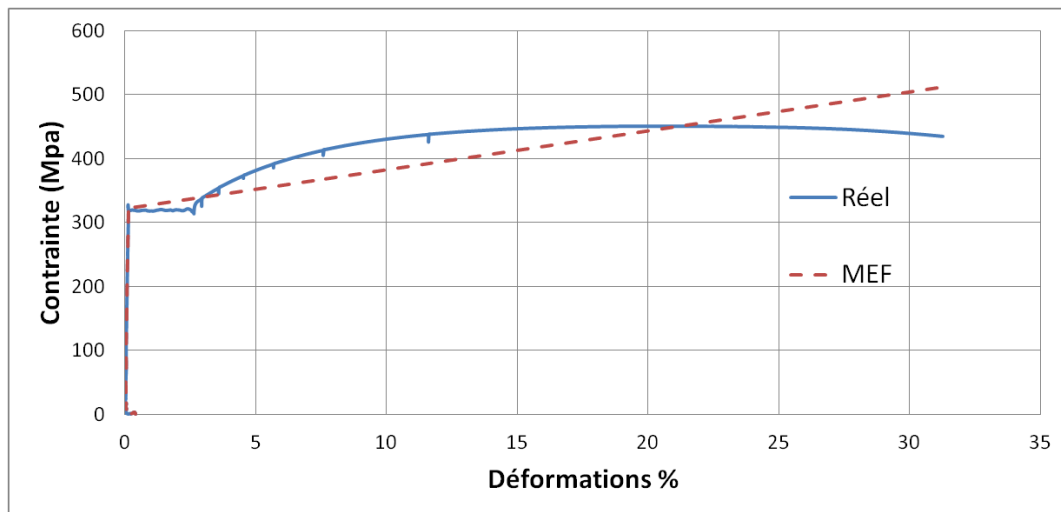


Figure II-5 Exemple de modélisation bilinéaire des caractéristiques matérielles de l'acier de la poutre AS016

1.2.3. Montage expérimental

Les essais correspondent à l'étude de la résistance ultime de poutres cellulaires soumises à de la flexion quatre points. La **Figure II-6** représente le schéma de chargement. Un chevrete rigide transfère la charge unique du vérin en deux charges symétriques égales. Le vérin est contrôlé en déplacement et un capteur de force disposé au niveau du vérin et deux autres sous chaque point d'appui du chevrete permettent de retracer de manière précise les efforts transmis à la poutre. Chaque poutre est constituée d'un même nombre d'ouvertures ($n = 6$) et les charges sont toujours appliquées au niveau des montants intermédiaires des ouvertures 2-3 et 4-5. Par conséquent les ouvertures qui combinent l'effort tranchant maximal ainsi que le moment maximal sont les ouvertures 2 et 5.

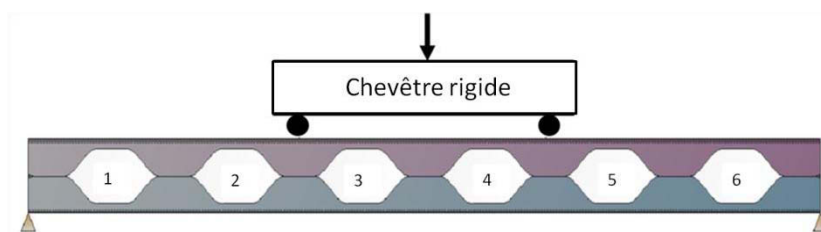


Figure II-6 Schéma de flexion des poutres testées

Comme l'étude est axée sur le mode de ruine local des poutres testées (ruine dans les ouvertures), des maintiens latéraux anti-déversement ponctuels sont disposés sur la longueur des poutres. Ces appuis hors plan sont localisés aux appuis extrêmes, aux points de chargement et à mi-travée (points de compression maximale des semelles supérieures), voir **Figure II-7**. La bonne disposition de ces maintiens est primordiale car, si les poutres venaient à déverser, les résultats des essais seraient inexploitable pour l'étude escomptée. Les simulations préliminaires ont permis de confirmer que ces maintiens étaient suffisants pour éviter le déversement des poutres.

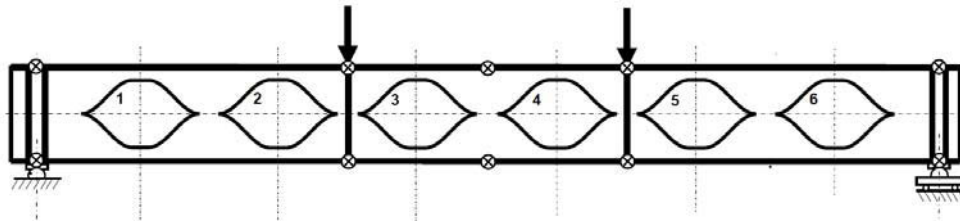


Figure II-7 Positions des maintiens anti-déversement [MAN, 09-1]

Des études aux éléments finis préliminaires élaborées par le Centre Technique Industriel de la Construction Métallique (CTICM) ont permis de choisir les positions des jauges de déformations et rosettes. Un exemple de disposition de jauges est fourni **Figure II-8**. Les déplacements verticaux et horizontaux de différents points de la poutre sont mesurés grâce à la combinaison de deux systèmes de mesures, par capteurs de déplacement et par mesure vidéo. La mesure vidéo utilise deux caméras permettant de retracer le déplacement 3D des différentes cibles disposées sur la poutre.

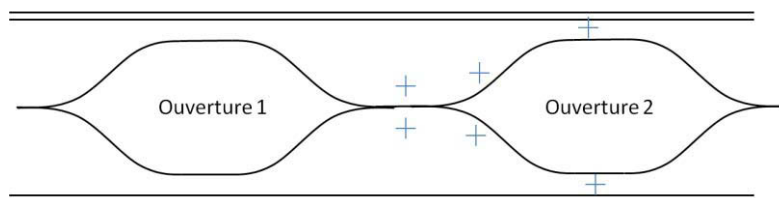


Figure II-8 Exemple de position de jauges de déformation (poutre AS012)

La **Figure II-9** présente un exemple de montage de poutre munie des différents appareils de mesure dont les cibles pour la mesure vidéo en noir et blanc. L'avantage certain du système de mesure par vidéo est qu'il permet d'avoir autant de points de mesure que ceux qui sont visibles par les deux caméras de manière très aisée ; avec des capteurs de déplacement, les mesures sont souvent limitées au nombre de capteurs disponibles ou au nombre de voies de mesure disponibles par les appareils d'acquisition.



Figure II-9 Montage expérimental avec cibles de mesure par vidéo (poutre AS012)

Du fait que les poutres sont isostatiques en flexion quatre points, la ruine est attendue autour des ouvertures 2 et 5. Ainsi, dans le but de n'avoir à instrumenter qu'une seule ouverture, les ouvertures 5 et 6 seront raidies à l'aide de raidisseurs sinusoïdaux de part et d'autre de l'âme (pour les poutres AS012 et AS108) et de raidisseurs plats disposés sur les semelles pour la poutre AS016. L'ouverture critique n°2 pourra ainsi être largement instrumentée de capteurs horizontaux, de jauges de déformation et de cibles afin de permettre des mesures les plus pertinentes possibles du mode de ruine de l'ouverture.

1.2.4. Procédure des essais

Avant chaque essai, des chargements préliminaires sont appliqués afin de vérifier la bonne réponse des instruments de mesures. Les trois essais suivent la même procédure en trois étapes. Tout d'abord un premier essai est effectué dans le domaine élastique avec des cycles de charge-décharge. Ensuite la seconde étape correspond au renforcement des ouvertures 5 et 6 à l'aide de raidisseurs locaux (voir **Figure II-10**).



Figure II-10 Photographie prise après raidissage des ouvertures 5 et 6 de la poutre AS012

La symétrie des poutres assure ainsi que la ruine apparaît systématiquement autour de l'ouverture 2. La troisième étape consiste ensuite au chargement jusqu'à la ruine de la poutre, caractérisée par la chute d'effort global repris par la poutre durant le déplacement vertical du vérin. Afin d'obtenir cette branche descendante de la courbe force-déplacement caractéristique de la ruine, il est nécessaire d'utiliser un chargement en déplacement contrôlé.

1.2.5. Résumé des résultats expérimentaux

Nous pouvons observer sur la **Figure II-11** les courbes force-déplacement vertical (à mi-travée) de la poutre AS012 en phase de test élastique et en phase de test jusqu'à la ruine de la poutre (après raidissage des ouvertures 5 et 6). La comparaison de ces deux courbes montre que le fait de raidir les ouvertures 5 et 6 ne change pas le comportement global de la poutre et que la rigidité flexionnelle est approximativement la même.

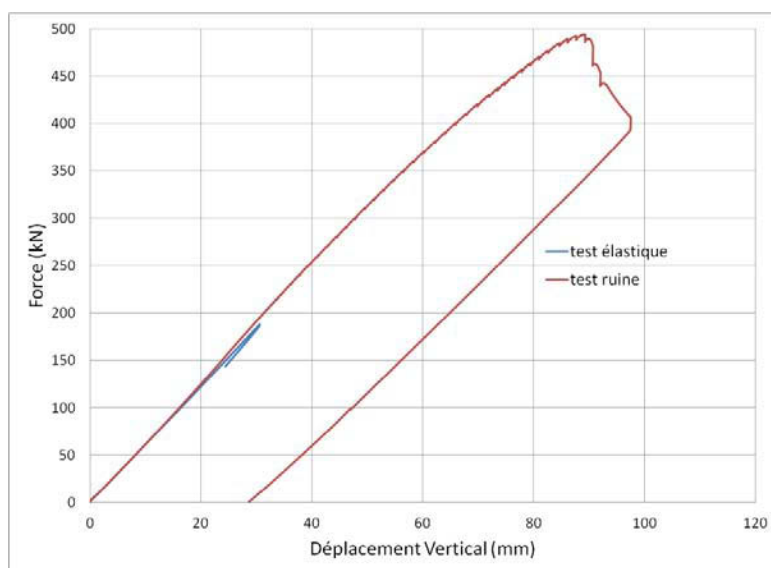


Figure II-11 Comparaison des courbes force-déplacement entre la phase 1 et la phase 3 de l'essai sur la poutre AS012

Ce travail s'est principalement concentré sur l'étude à la ruine, nous ne présentons que les résultats liés au chargement jusqu'à la ruine des poutres. Pour les trois poutres testées, la ruine est attendue autour de l'ouverture 2. Les ruines locales peuvent être dues soit à la plastification, soit au voilement local par flexion Vierendeel des différentes parties de l'ouverture critique. Les poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales ne peuvent pas avoir de flambement du montant intermédiaire de par leurs conceptions qui donnent une largeur de montant intermédiaire « w » importante (voir **Figure II-2**) avec une restriction de $w > 250\text{mm}$. De ce fait, le mode de ruine observé de chacune des poutres testées est lié à la flexion Vierendeel.

1.2.5.1. Résultats expérimentaux pour la poutre AS016

La poutre AS016 a la plus grande ouverture et par conséquent les plus petites dimensions de sections en té au niveau des membrures supérieures et inférieures de l'ouverture. Ainsi il peut être observé une ruine par plastification des deux membrures de l'ouverture aux 4 coins (limites entre la partie droite et la partie sinusoïdale de l'ouverture), mode de ruine similaire à une ouverture rectangulaire. La **Figure II-12** présente la ruine de l'ouverture 2 de la poutre AS016 avec les 4 rotules plastiques.

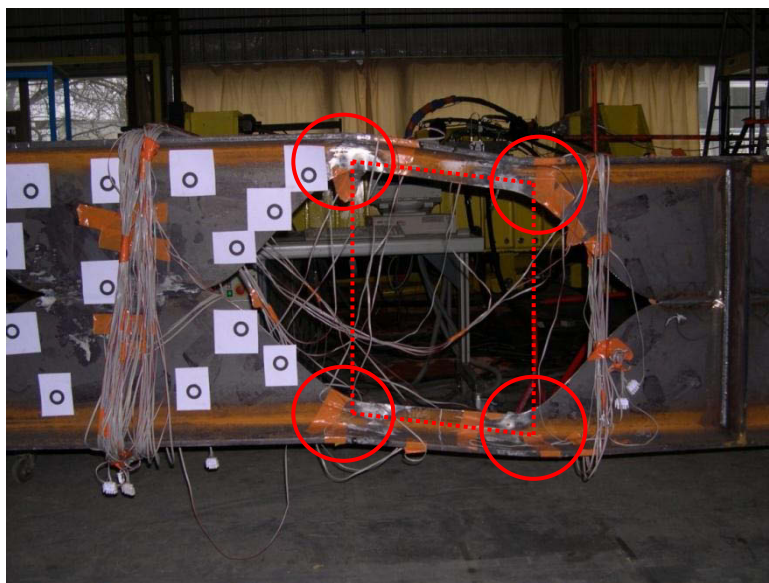


Figure II-12 Formation de quatre rotules plastiques à l'état ultime (poutre AS016)

Lors de cet essai, seules les rotules plastiques ont été observées. Aucun voilement local n'a été observé ou mesuré. En effet, la **Figure II-13** donne un exemple de mesures de déformation de deux jauges (ubg1, ubd1) disposées sur le même point de part et d'autre de l'âme. Le point de mesure correspond à un des coins sur lequel a été observée la formation d'une rotule plastique. Les deux courbes représentant l'évolution des déformations en fonction du temps sont très proches. Cela indique qu'il n'y a aucune flexion hors plan au niveau du point mesuré, ce qui justifie le fait que la formation de la rotule se fait sans aucun voilement local.

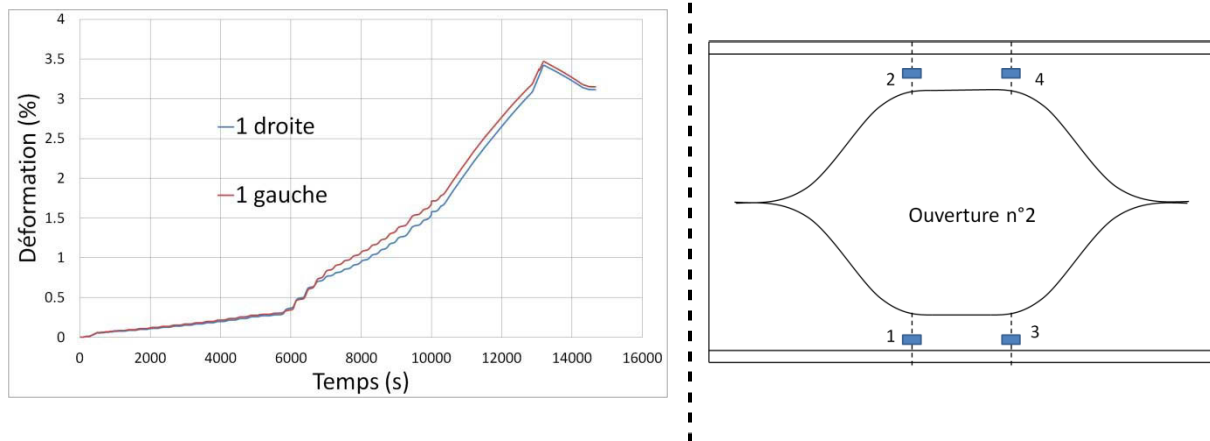


Figure II-13 Diagramme Déformation en fonction du Temps pour un coin de l'ouverture AS016

Les contraintes obtenues à partir des mesures de déformation aux quatre coins de l'ouverture sont données **Figure II-14**. Les diagrammes sont tracés en utilisant un module d'Young $E = 210\,000\text{ MPa}$ pour des contraintes inférieures à la limite élastique mesurée et un module $E' = 0\text{ MPa}$ pour les contraintes supérieures.

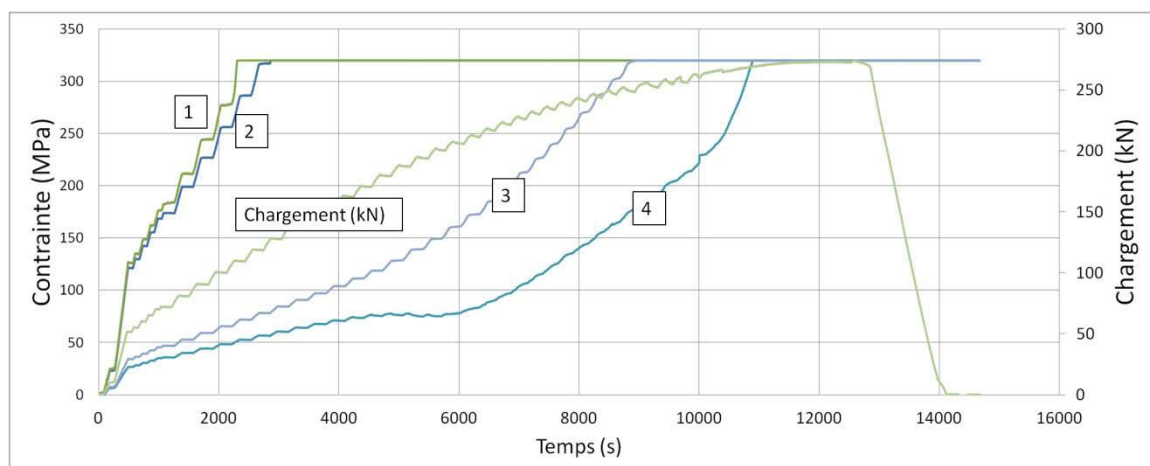


Figure II-14 Mesures de contraintes sur l'âme aux 4 coins de la seconde ouverture de la poutre AS016

Cette simplification qui ne représente pas l'écrouissage sert simplement à montrer que la limite élastique est atteinte dans chaque point mesuré aux quatre coins de l'ouverture. Cela permet de justifier la formation de rotules plastiques.

1.2.5.2. Résultats des poutres AS012 et AS018

Pour les deux autres configurations de poutre (AS012, AS018), un comportement différent a été observé, avec un voilement local des parois sinusoïdales comprimées de l'ouverture critique. Ce dernier a été confirmé par les mesures de capteurs de déplacement horizontaux et des jauges de déformations situées de part et d'autre de l'âme au niveau du point de la section critique.

Les figures suivantes montrent les mesures de déplacement hors plan faites sur les sections critiques des poutres AS012 et AS018. Pour la poutre AS012, la **Figure II-16** montre le diagramme de déplacement hors plan mesuré au point localisé par la **Figure II-15** (capteur horizontal H07) et le diagramme d'effort global en fonction du temps. L'évolution du déplacement hors plan commence à accélérer avant d'atteindre l'effort ultime de la poutre. Ce diagramme met en évidence l'existence d'un voilement local qui apparaît avant la charge ultime. De plus, il semble que la poutre ait une réserve de résistance car elle atteint la ruine après le voilement local de la paroi. L'étude détaillée faite par modélisation éléments finis a permis de confirmer que la ruine globale de la poutre est due à la combinaison de plusieurs ruines locales des différentes parties de l'ouverture.

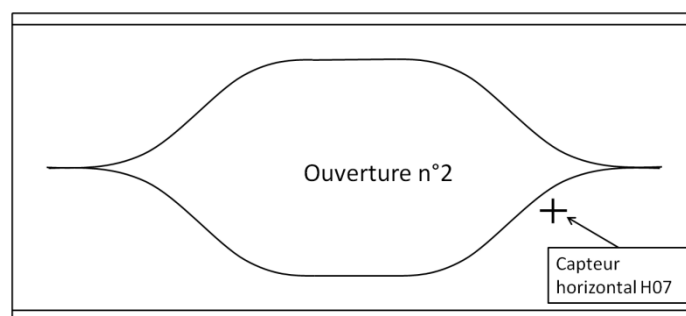
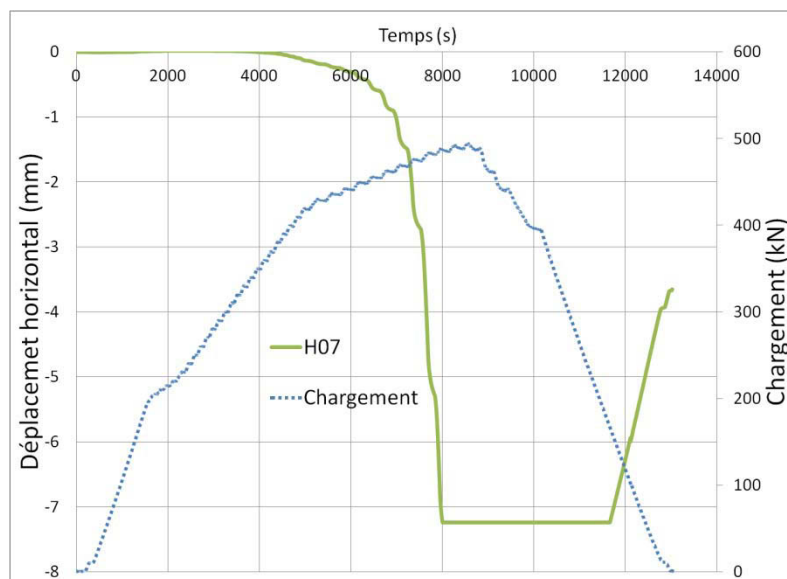


Figure II-15 Position du capteur horizontal H07



(a) Mesure du déplacement horizontal en fonction du temps



(b) Observation de l'onde de voilement au niveau du capteur H07

Figure II-16 Mesure et observation du voilement local de la paroi sinusoïdale de l'ouverture 2 de la poutre AS012

La **Figure II-17** donne l'observation faite du voilement local de la paroi sinusoïdale de l'ouverture 2 de la poutre AS018. Il peut être remarqué sur cette photo que la cible servant à la mesure du déplacement hors plan s'est décollée à cause de la flexion locale. Ce problème, observé pour un seul point, aurait pu être évité en utilisant des cibles peintes au lieu des cibles collées. Cet

incident n'a pas d'effet sur la détection du voilement local grâce à la redondance des mesures effectuées.



Figure II-17 Voilement local observé sur la section critique de la poutre AS018

En effet, l'observation du voilement local a pu être confirmée grâce aux mesures de déformation. Une illustration de ces mesures est donnée **Figure II-18**. Ces mesures ont été effectuées dans la même zone que celles du déplacement hors plan de la poutre AS012 donnée **Figure II-15**. Cette fois, ces mesures ont été faites à l'aide d'une rosette.

La **Figure II-18** donne la mesure de la déformation principale de compression des deux rosettes situées de part et d'autre de l'âme au niveau du point de mesure. Afin de situer le voilement local sur le comportement global de la poutre il a été choisi de rajouter en parallèle la courbe force appliquée/temps.

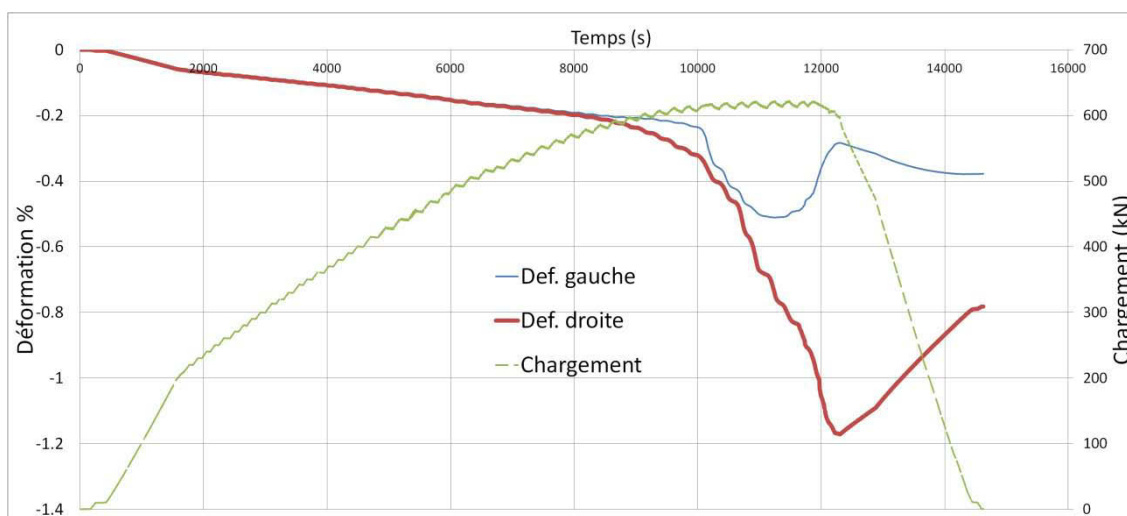


Figure II-18 Mesure des déformations principales de part et d'autre de l'âme au niveau du point de mesure en fonction du temps, pour la poutre AS018

La **Figure II-18** montre que la poutre atteint sa charge ultime au-delà de l'apparition du voilement. En effet, la charge appliquée a continué à augmenter alors que le voilement local est déjà entamé de façon notable. Par conséquent, la même conclusion concernant la poutre AS012 peut être faite à cette poutre AS018. La ruine locale par voilement de la paroi comprimée de l'ouverture critique n'entraîne apparemment pas immédiatement la ruine globale de la poutre. Une certaine redistribution d'effort autour de l'ouverture semble se développer et apporter à la poutre une résistance supplémentaire jusqu'à la ruine globale. Cependant, les mesures de voilement montrent que la ruine reste fortement liée à la ruine locale des parties de l'ouverture les plus critiques. Seule une analyse numérique détaillée permettrait de mieux appréhender les causes de la ruine globale de la poutre ainsi que les éventuelles redistributions d'efforts autour de l'ouverture.

A partir des études théoriques et numériques préliminaires des ouvertures sinusoïdales, il était attendu d'observer deux modes de ruine : soit la plastification des coins de l'ouverture soit le voilement local des parois sinusoïdales de l'ouverture. Ces deux modes de ruine ont pu être identifiés et la première hypothèse est que l'existence de l'un ou de l'autre semble dépendre de la hauteur d'âme des sections en té des membrures supérieures et inférieures au droit de l'ouverture. Cette hypothèse revient à dire que le mode de ruine observé semble dépendre de la taille d'ouverture par rapport à la hauteur de poutre.

Ces résultats expérimentaux vont tout d'abord servir à valider le modèle numérique développé sur le logiciel aux éléments finis SAFIR. Ensuite, une fois ce modèle numérique validé, il est possible de présenter une étude numérique détaillée de la ruine de chaque poutre testée afin de mieux comprendre le comportement de ces poutres.

1.3. Modèle numérique

Un modèle éléments finis développé sur SAFIR a été utilisé pour analyser le comportement des poutres testées. Ce modèle utilise les éléments coques à quatre nœuds et quatre points de Gauss [FRA, 02], [FRA, 07]. La **Figure II-19** présente un exemple de modélisation d'une poutre cellulaire avec condition de symétrie et le maillage fait autour d'une ouverture sinusoïdale.

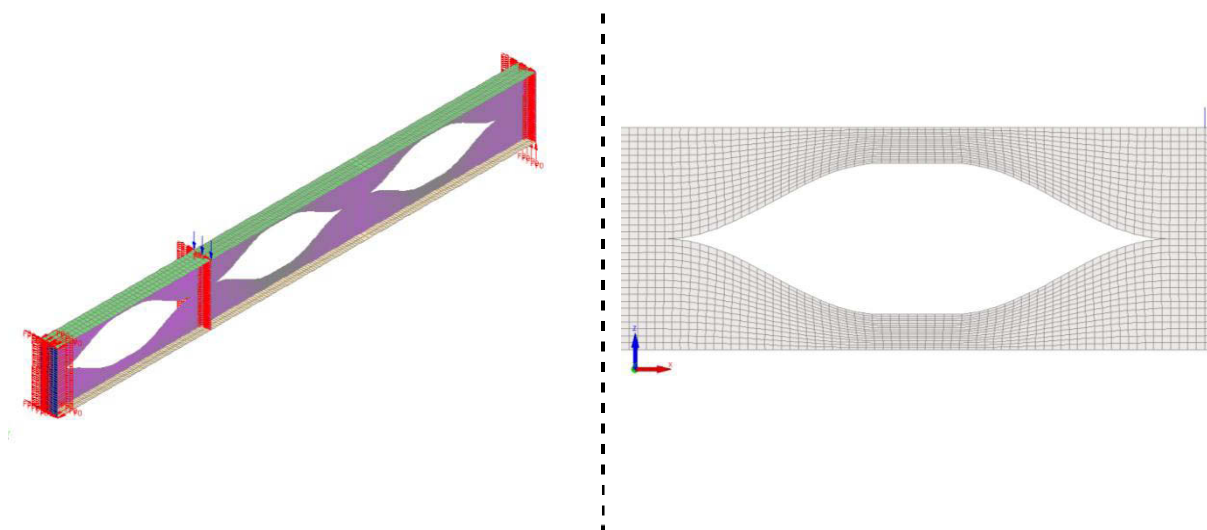


Figure II-19 Modèle d'une poutre avec des conditions de symétrie (gauche). Exemple de maillage d'une ouverture (droite).

Le logiciel permet d'effectuer un calcul non-linéaire en grands déplacements pour tenir compte des non-linéarités géométriques et matérielles en utilisant une résolution par la méthode de Newton-Raphson. L'élément coque est particulièrement efficace pour représenter les phénomènes tels que le voilement local en ne nécessitant que peu de ressources en comparaison avec un modèle utilisant des éléments volumiques. Plusieurs précédentes études numériques faites sur des poutres cellulaires ont montré l'efficacité de cet élément à correctement représenter le comportement de ces poutres et notamment les phénomènes d'instabilité comme le flambement du montant intermédiaire. [HAG, 09], [NAD, 07], [SOL, 11] et [VAS, 09-1]

De plus, de précédentes études faites avec le logiciel SAFIR pour étudier le comportement au feu de poutres cellulaires ont donné de très bons résultats en comparaison avec les résultats expérimentaux et prouvaient déjà les bonnes capacités du modèle MEF à représenter le comportement de poutres cellulaires. [NAD, 07]

Dans la partie expérimentale présentée ci-dessus, les mesures des défauts géométriques ne montraient pas de différences importantes avec les valeurs nominales. Ainsi, les caractéristiques géométriques nominales ont été considérées dans le modèle numérique à l'exception des imperfections initiales pour lesquelles la forme et l'amplitude sont basées sur les mesures faites sur les poutres. Une loi de comportement bi-linéaire a été choisie pour représenter le matériau acier dans le modèle. Cette loi considère un module d'Young, une limite d'élasticité et un module d'écrouissage E' , déduits des essais de traction (voir **Figure II-5** et **Tableau II-4**).

Une analyse non-linéaire est effectuée en grands déplacements avec un chargement en déplacement contrôlé afin de pouvoir clairement observer la ruine de la poutre et une partie du domaine post-critique (branche descendante de la courbe force-déplacement). Les conditions aux limites respectent au mieux celles des essais, avec des poutres bi-appuyées au niveau des semelles inférieures, maintenues ponctuellement latéralement au niveau des semelles et munies de raidisseurs sinusoïdaux autour des ouvertures 5 et 6. Le maillage a été choisi afin de définir avec suffisamment de précision le comportement de la poutre, la densité de maillage étant accentuée au niveau de l'ouverture critique n°2.

Le modèle est validé sur la base des résultats expérimentaux en considérant la comparaison des charges ultimes, des modes de ruine et des courbes globales force-déplacement des poutres testées. Une fois le modèle validé, il sert de base pour une étude détaillée des distributions d'effort autour de l'ouverture. Les principaux résultats de cette étude sont donnés par la suite.

1.4. Résultats numériques et comparaison avec les essais

1.4.1. Poutre AS012

La poutre AS012 correspond à une configuration d'ouverture standard avec $a_0/H_{\text{tot}} = 0,67$. Les résultats numériques montrent que la ruine semble induite par le voilement local précédemment observé sur les essais. Cette instabilité locale apparaît sur deux quarts d'ouverture, l'un sur la membrure supérieure et l'autre sur la membrure inférieure de l'ouverture critique, comme il peut être constaté sur la représentation des iso-déplacements hors plan de la **Figure II-20** (b). Il peut être

observé sur cette même figure le détail des ouvertures 5 et 6 pour lesquelles les raidisseurs ont été modélisés (**Figure II-20 (c)**).

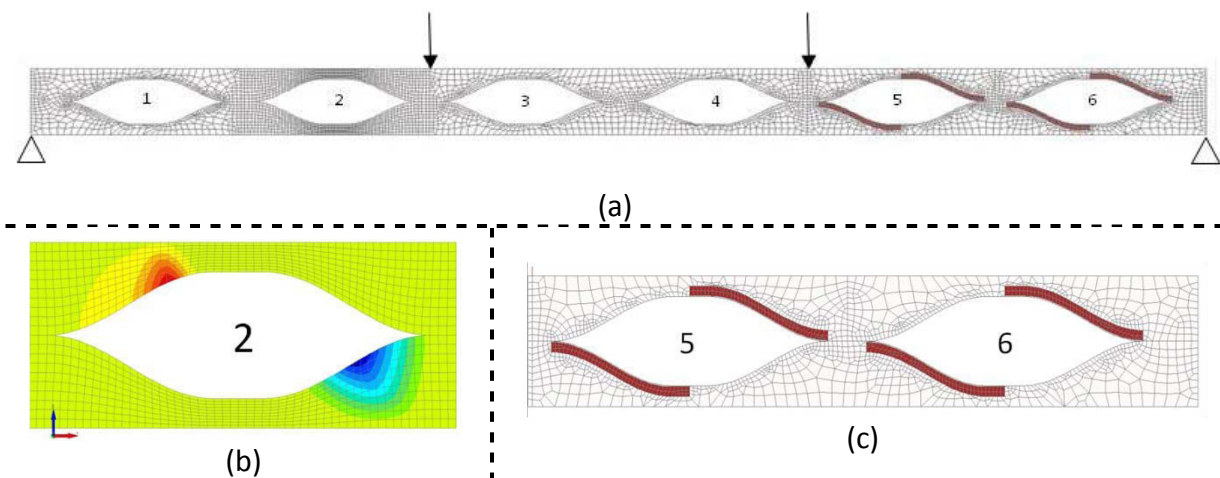


Figure II-20 Modèle éléments finis: (a) poutre globale, (b) iso-déplacements hors plan (ouverture 2, charge ultime), (c) raidisseurs sinusoïdaux

Pour les deux quarts d'ouverture, où le déplacement hors plan maximum a été observé expérimentalement, le modèle éléments finis (M.E.F.) montre une flexion hors plan caractéristique de voilement local. La **Figure II-21** compare les courbes force-déplacement (déplacement vertical à mi-travée) mesurées expérimentalement ou obtenues par le modèle MEF avec et sans écrouissage. L'écrouissage considéré est celui d'une loi bilinéaire, avec, comme module d'écrouissage E' , celui mesuré expérimentalement, voir **Tableau II-4**. La comparaison entre ces courbes, montre une très bonne concordance entre le modèle numérique MEF et les essais.

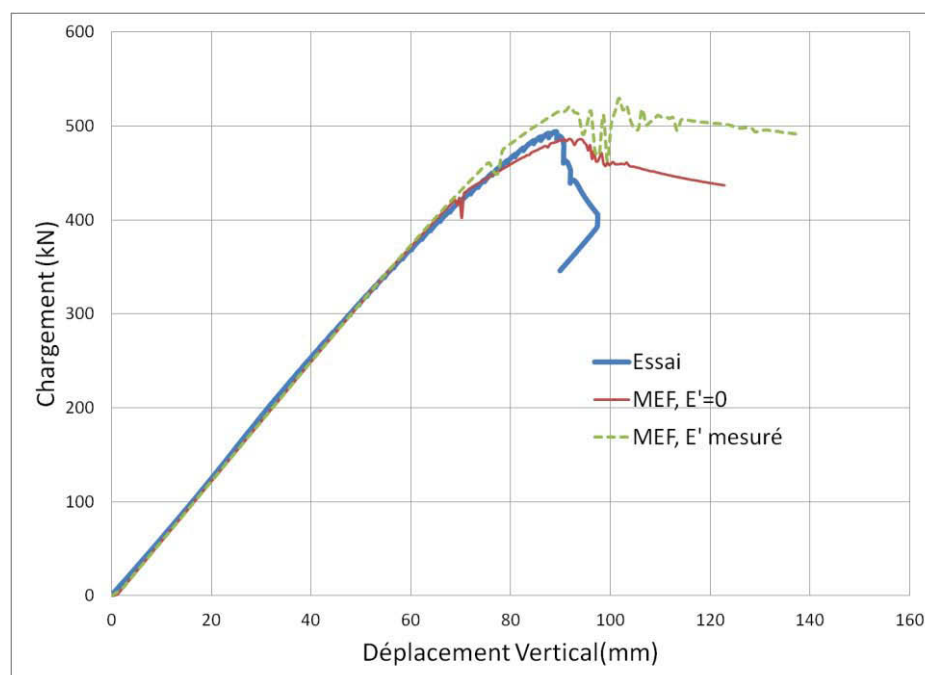


Figure II-21 Diagramme force-déplacement de la poutre globale AS012

Il peut être remarqué sur la **Figure II-21** qu'il n'y a pas beaucoup d'écart entre les deux courbes numériques qui restent relativement proches de la courbe expérimentale. De plus, il peut être observé sur la **Figure II-22**, que le modèle numérique représente fidèlement la forme de la déformée observée lors des essais, notamment le voilement local autour de l'ouverture 2.

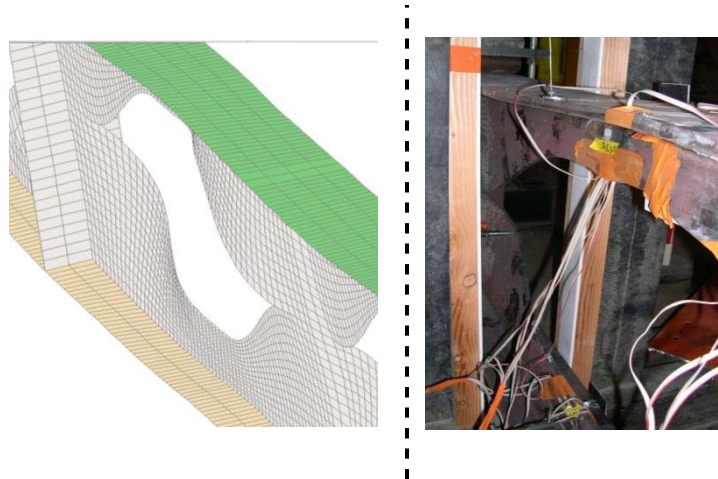


Figure II-22 Déformée de l'ouverture n°2 à la charge ultime (MEF et Essai)

1.4.2. Poutre AS016

La poutre AS016 a la particularité d'avoir une ouverture de grande taille ($a_0/H_{\text{tot}} = 0,78$). Les essais ont montré un mode de ruine similaire à une ouverture rectangulaire, avec la formation de quatre rotules aux quatre coins de l'ouverture. Les courbes représentant la force en fonction du déplacement vertical obtenues numériquement et expérimentalement sont données **Figure II-23**. Outre la courbe expérimentale, les courbes numériques représentent différents cas étudiés numériquement avec différentes valeurs de module d'écroutissage E' . En effet, comme la ruine correspond à une plastification avancée de l'ouverture 2, l'influence de l'écroutissage est donc nettement plus importante. Il a donc été choisi de comparer les résultats pour différentes valeurs de l'écroutissage avec $E' = 0$, $E/100$ et = valeur mesurée avec les essais de traction donnés **Tableau II-4**. Le palier plastique obtenu numériquement indique clairement un mode de ruine par plastification, le palier horizontal correspondant au cas d'écroutissage nul.

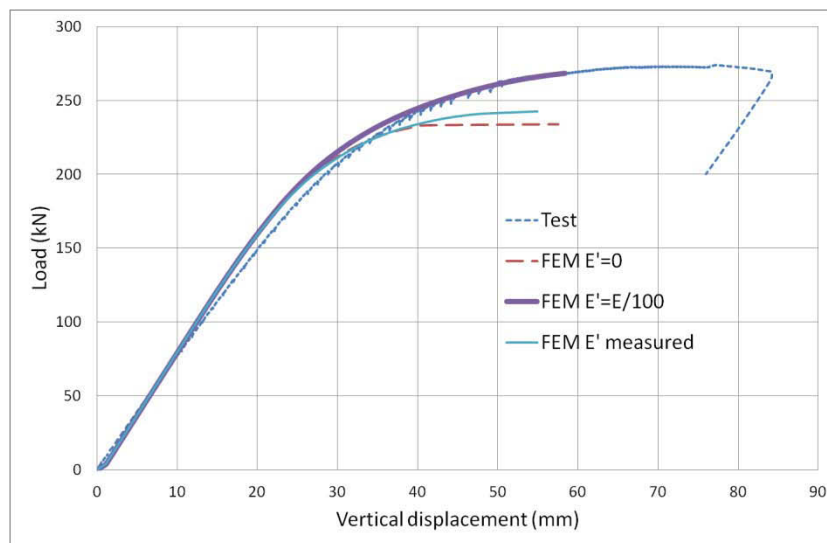


Figure II-23 Diagramme force-déplacement de la poutre AS016

Nous observons sur la **Figure II-23** que considérer un écrouissage permet au modèle MEF d'être plus représentatif de la réalité par rapport à un modèle sans écrouissage, ce qui est logique du fait du mode de ruine plastique de cette poutre.

1.4.3. Poutre AS018

La poutre AS018 est caractérisée par une ouverture de petite taille par rapport à la hauteur totale avec $a_0/H_{\text{tot}} = 0,42$. Ainsi le mode de ruine observé lors des essais est similaire à celui de la poutre AS012 avec une ruine locale par voilement des parois comprimées de l'ouverture 2. Les courbes de force-déplacement mesurées et calculées numériquement sont données **Figure II-24**. Sur cette figure il peut être observé que le modèle MEF représente fidèlement le comportement mesuré expérimentalement. De même que, dans les cas précédents, il a été choisi d'étudier l'influence de la prise en compte de l'écrouissage.

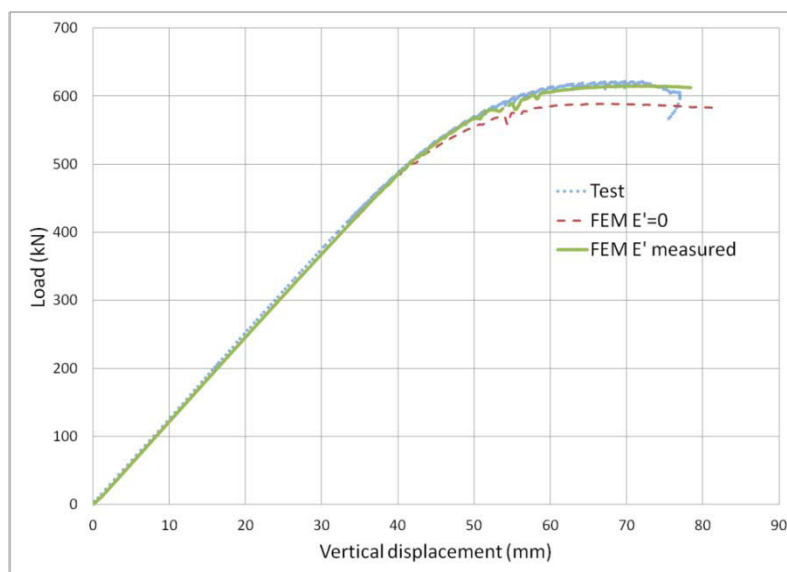


Figure II-24 Diagramme force-déplacement pour la poutre AS018

Il peut être constaté que dans ce cas, l'écrouissage permet d'augmenter la précision du modèle, même si le modèle élastique-parfaitement plastique donne déjà des résultats satisfaisants. En effet, comme la ruine se situe dans le domaine élasto-plastique, à l'inverse de la poutre AS016 pour laquelle il y avait une importante plastification, dans ce cas l'écrouissage est bien moins influent.

1.4.4. Bilan des résultats

Le **Tableau II-5** résume les charges ultimes obtenues expérimentalement et numériquement (en considérant un écrouissage égal à $E'_{\text{mesuré}}$). La comparaison faite en dernière colonne permet de clairement montrer que le modèle numérique donne des résultats très satisfaisants.

Poutre	$F_{\text{ult exp.}}(\text{kN})$	$F_{\text{ult MEF}}(\text{kN})$	MEF/Essai
AS012	494,3	529	1,07
AS016	274	242,6	0,89
AS018	621,8	614,9	0,99

Tableau II-5 Résumé des résultats (MEF et Essai)

Le plus gros écart observé est pour la poutre AS016. Les observations faites sur la **Figure II-23** montrent que cet écart est certainement dû à l'erreur faite sur la loi du matériau. En effet il a été montré que si l'on considérait un écrouissage de $E' = E/100 = 2100 \text{ MPa}$ au lieu de $E' = 619 \text{ MPa}$, le modèle serait plus représentatif de la réalité. Cependant l'écart obtenu avec le modèle qui considère $E' = 619 \text{ MPa}$ reste acceptable.

Finalement, au travers de ces différentes comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques il ressort que le modèle MEF fournit des résultats fiables et proches de la réalité. Le modèle peut donc être considéré comme validé. Ce modèle va donc servir d'outil numérique pour

étudier en détail l'état de contrainte autour de l'ouverture critique de chaque poutre afin d'identifier les causes et les modes de ruine.

1.4.5. Etude numérique détaillée des poutres testées

Ce chapitre décrit en détail chaque poutre et donne l'évolution des contraintes durant le chargement pour les sections critiques des quatre quarts d'ouverture. L'analyse de l'éventuelle ruine des différentes parties de l'ouverture permet de mieux définir le mode de ruine de chaque poutre. Par exemple, la poutre AS016 a une ruine par formation de quatre rotules plastiques aux quatre coins de l'ouverture; la **Figure II-25** présente les positions des différentes sections critiques où la formation des rotules a pu être observée (**Figure II-12**). L'évolution des contraintes des sections en T_e critiques autour de l'ouverture est établie sur plusieurs points sur la hauteur de ces sections (voir **Figure II-25**). Afin d'avoir une visualisation plus nette de l'état de contrainte au sein des sections et simplifier les comparaisons, il a été choisi de privilégier pour l'étude une loi élastique-parfaitement plastique.

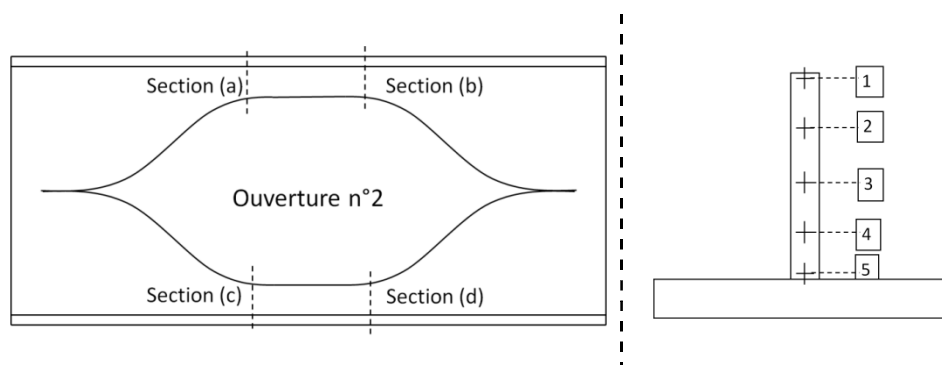


Figure II-25 Sections critiques autour de l'ouverture 2 (poutre AS016) et position, sur les sections en T étudiées, des éléments sur lesquels sont étudiées les contraintes

La poutre AS016 correspond au cas de plastification complète de l'ouverture. L'étude est axée sur l'évolution des contraintes sur chaque section (a), (b), (c) et (d) définie à la **Figure II-25**. Le critère de plastification étant celui de von Mises, il a été jugé plus pertinent d'étudier les contraintes équivalentes de von Mises, déduites des contraintes principales calculées par le modèle MEF. Même s'il a pu être constaté des écarts plus grands des charges ultimes entre le modèle sans écrouissage et le modèle avec, l'important dans cette étude est que l'utilisation du modèle simplifié sans écrouissage ne bouleverse pas le mode de ruine et donc la distribution de contrainte autour de l'ouverture. Ainsi la courbe force-déplacement est celle définie par la **Figure II-26**. Sur cette figure, le plateau plastique est clairement identifiable et le déplacement vertical pour lequel la poutre ne reprend plus d'effort est approximativement de 41mm.

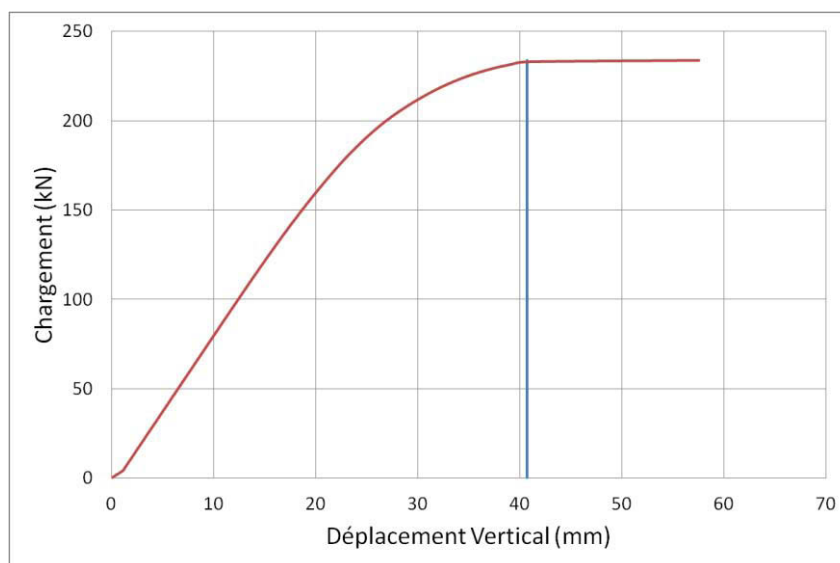


Figure II-26 Diagramme Force-Déplacement de la poutre AS016 avec $E' = 0$ MPa

L'instant pour lequel le déplacement vertical est de 41 mm sert de référence lors de l'étude de la distribution de contrainte autour de l'ouverture. Les évolutions des contraintes équivalentes de von Mises sur la hauteur des sections, en fonction du déplacement vertical appliqué, sont données par les **Figure II-27** à **Figure II-30**.

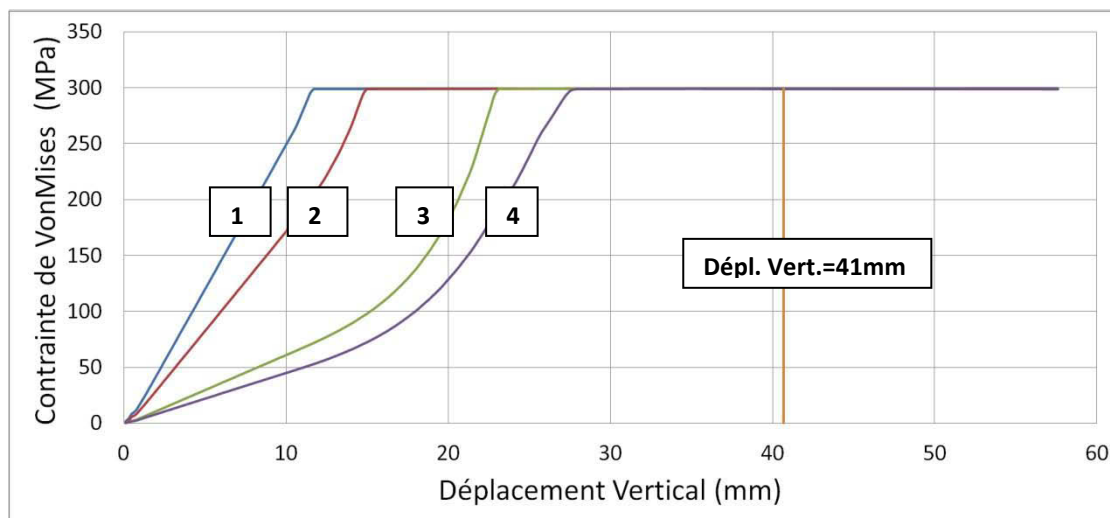


Figure II-27 Evolution des contraintes sur la section (a)

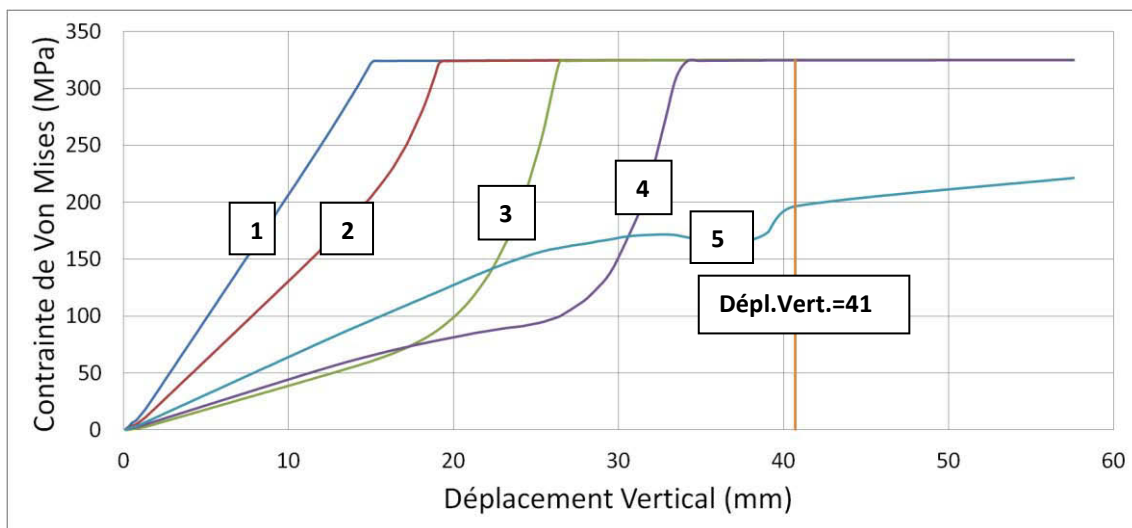


Figure II-28 Evolution des contraintes sur la section (b)

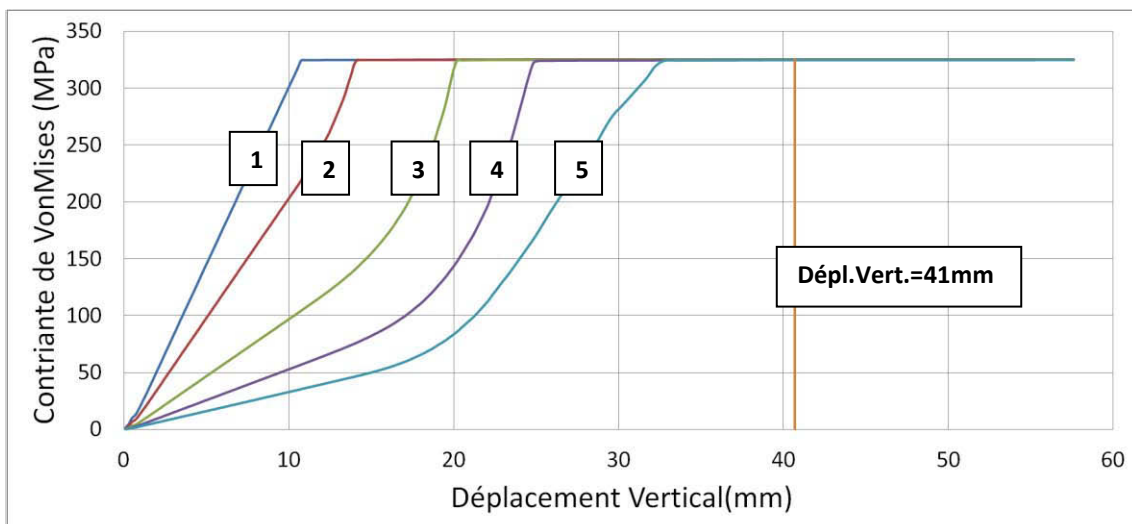


Figure II-29 Evolution des contraintes sur la section (c)

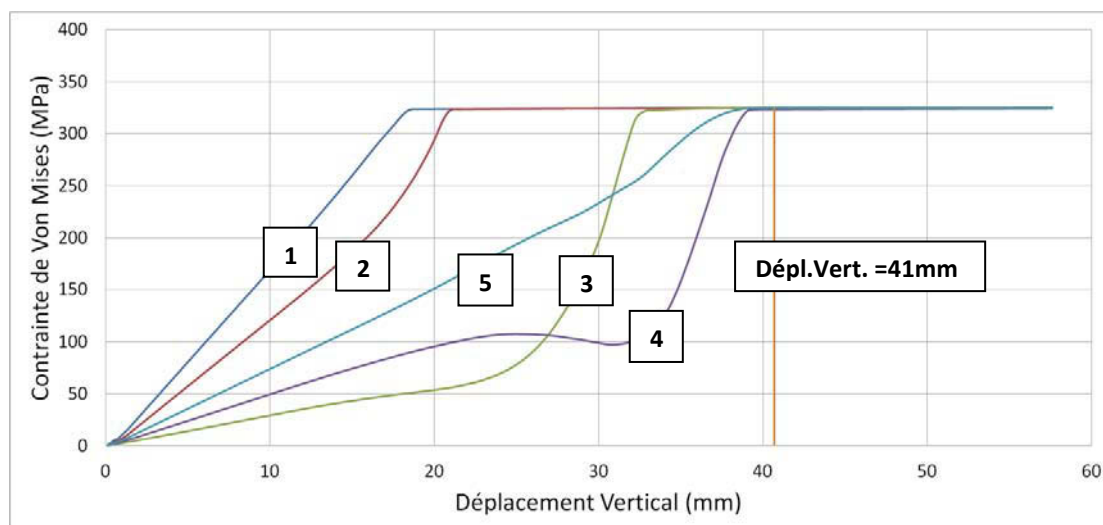


Figure II-30 Evolution des contraintes sur la section (d)

Les Figure II-27 à Figure II-30 montrent que tous les éléments, sur la hauteur des sections étudiées, atteignent leur limite élastique. Cela confirme la formation de rotules plastiques dans chacune de ces sections. Ces figures montrent que la formation des rotules correspond approximativement à l'instant pour lequel la poutre arrive au plateau plastique pour un déplacement vertical de 41mm. Il peut être conclu que la ruine globale de la poutre peut être attribuée à la formation de ces quatre rotules plastiques, aux quatre coins de l'ouverture, confirmant ainsi les observations expérimentales.

L'étude sur les deux autres poutres sera effectuée de la même manière, en détaillant l'état de contrainte dans les quatre sections considérées comme critiques. En revanche, la position de ces sections change avec la forme d'ouverture. En effet, dans le cas de voilement local d'une paroi de l'ouverture, la section critique sera définie comme la section pour laquelle l'élément en bord libre d'ouverture a le déplacement hors plan maximal. La Figure II-31 permet d'illustrer la notion de section critique en identifiant leurs positions à partir de l'étude des iso-déplacements hors plan des nœuds de l'ouverture 2. Comme le comportement des deux poutres AS012 et AS018 est assez similaire, il a été choisi de ne présenter que l'étude de la poutre AS012. (Voir [DUR, 12-2])

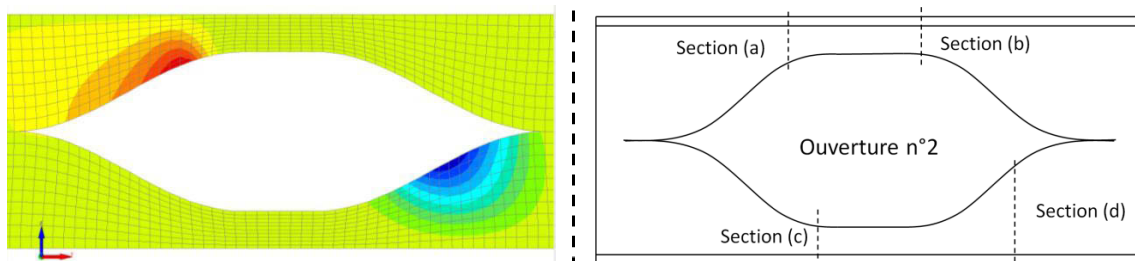


Figure II-31 Iso-déplacements hors plan à la charge ultime (gauche), position des sections critiques (droite)⁶

⁶ Les parties de l'ouverture sans déplacement hors plan sont susceptibles de plastifier, les positions des sections critiques pour ces parties sont donc similaires à celles de la Figure II-25.

Tout d'abord il peut être vu sur la **Figure II-32** que la forme de la déformée de la poutre permet d'identifier les zones d'instabilité. L'étude des contraintes, au niveau des sections critiques des quarts d'ouvertures avec d'importants déplacements hors plan, permet de valider l'existence d'un voilement local précédant la ruine de la poutre. L'étude des autres parties de l'ouverture donne des informations intéressantes sur l'état de contrainte global autour de l'ouverture.

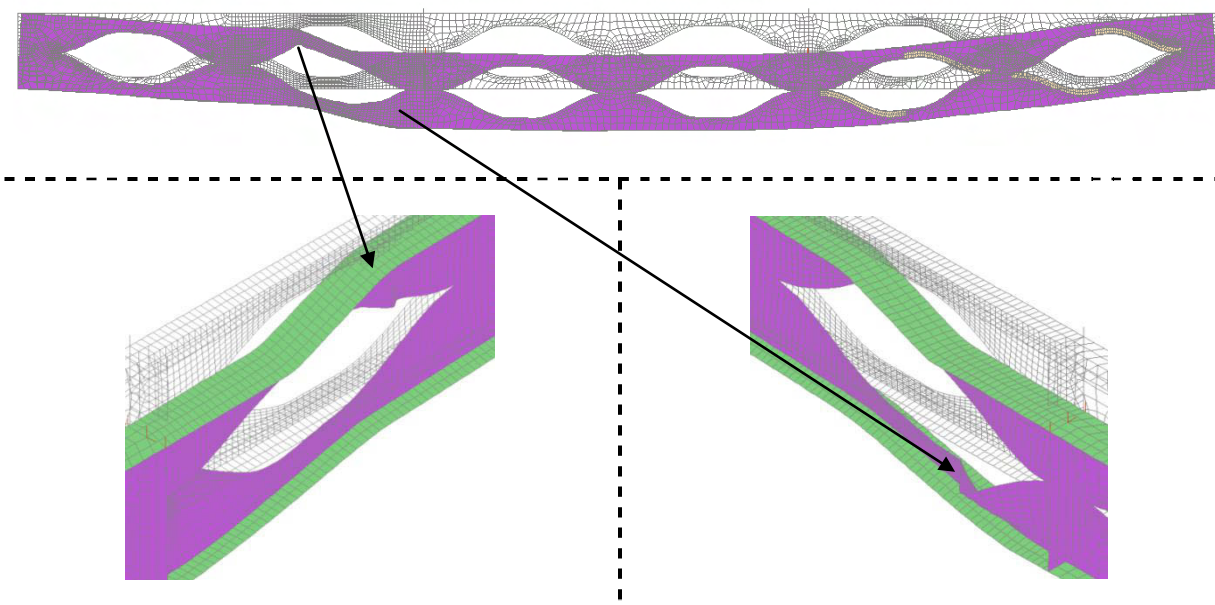


Figure II-32 Déformée de la poutre AS012 et zoom sur l'ouverture 2

La ruine globale de la poutre AS012 est définie par la branche descendante de la courbe force-déplacement donnée **Figure II-33** (courbe correspondant à celle donnée **Figure II-21** avec un module d'écroutissage $E' = 0$). Le déplacement vertical correspondant à la charge maximale est de 91mm, cette valeur peut donc être assimilée à une référence caractérisant la ruine globale de la poutre dans la suite de l'étude. Les diagrammes donnant l'évolution des contraintes équivalentes de von Mises sur la hauteur des sections critiques sont montrés par les **Figure II-35** à **Figure II-38**.

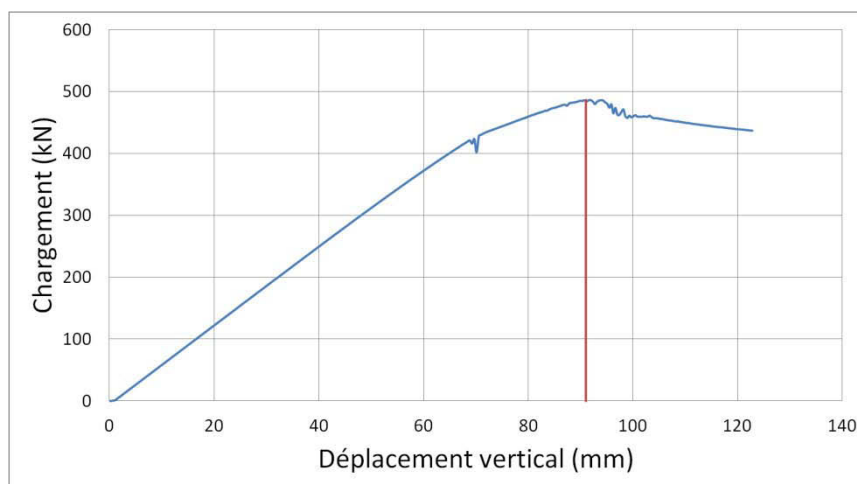


Figure II-33 Diagramme force-déplacement pour la poutre AS012 avec $E' = 0$ MPa

La **Figure II-34** donne le déplacement hors plan aux nœuds en bord libre des sections (a) et (d) pour lesquelles il a été observé le maximum de déplacement horizontal (voir **Figure II-32**). Les deux courbes ont une allure caractéristique d'un voilement local. De plus, l'inflexion des deux courbes correspond approximativement à un déplacement vertical de 91mm comme il avait pu être observé lors de l'essai. Cette observation met en évidence le lien entre l'instabilité locale de l'ouverture et la ruine globale de la poutre. L'étude des contraintes permettra de rentrer dans le détail de la ruine locale de chaque quart d'ouverture.

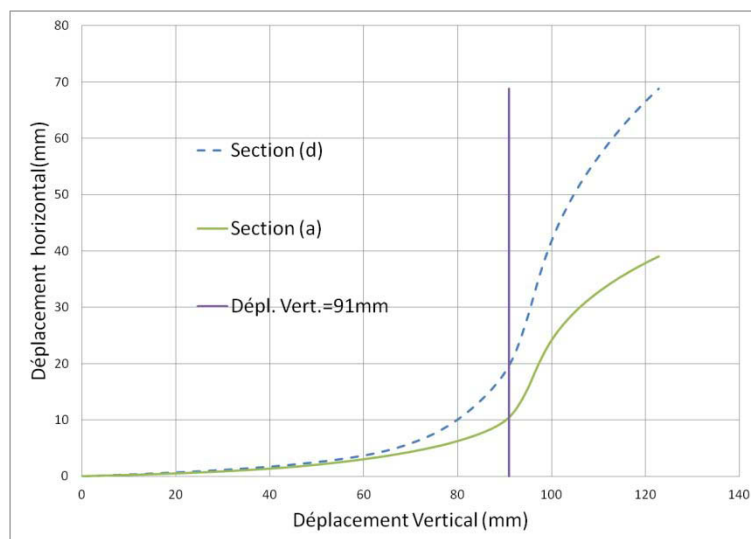


Figure II-34 Déplacement hors plan des sections (a) et (d) en fonction du déplacement vertical global

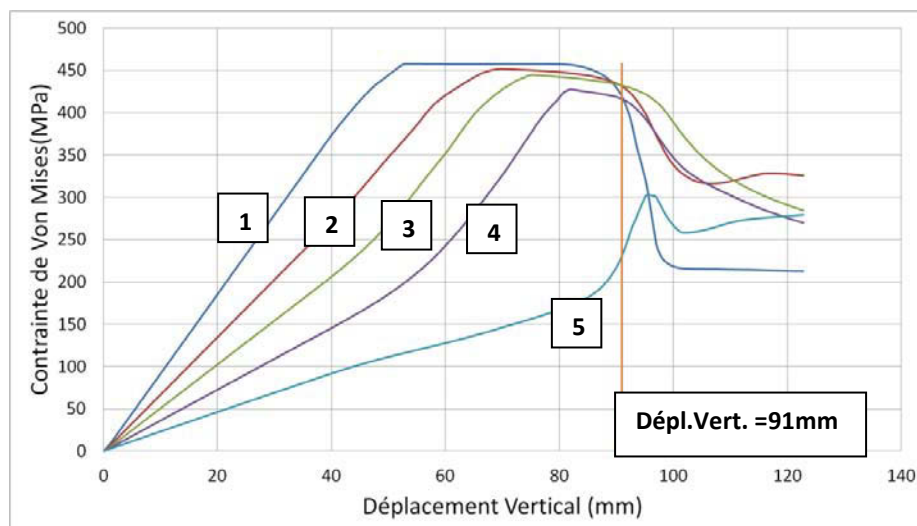


Figure II-35 Evolution des contraintes dans la section (a)

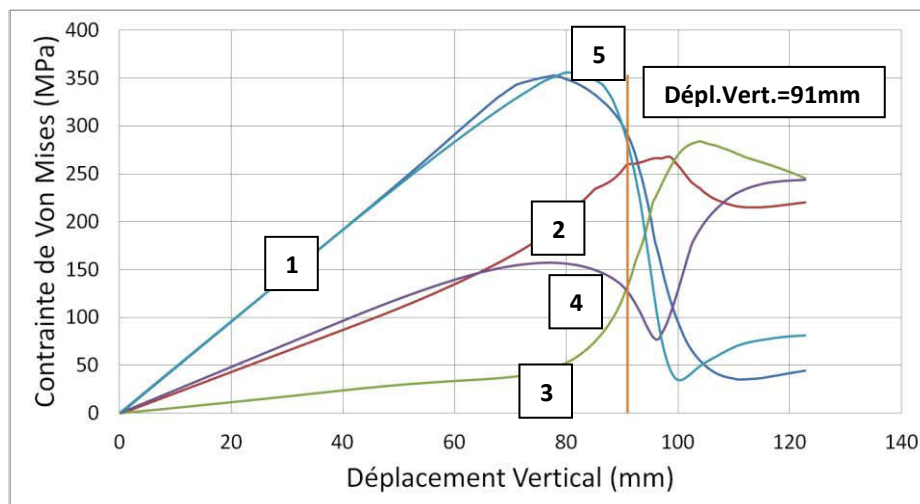


Figure II-36 Evolution des contraintes dans la section (d)

L'analyse des contraintes montre que les quarts d'ouverture sont chargés en traction et compression suivant le moment de flexion global de la poutre. De plus, une flexion locale des sections en té due à l'action Vierendeel est ajoutée aux efforts axiaux de flexion globale. Ainsi, chaque section est chargée par une combinaison d'efforts axiaux de traction ou de compression et de flexion en fonction de leurs positions autour de l'ouverture (voir **Figure II-38**). Il peut être observé que les deux quarts d'ouverture correspondant aux sections (a) et (d) sont soumis à une compression des parois en bord libre qui implique le voilement local de l'âme de ces sections. Cependant, la partie en bord libre des deux autres quarts d'ouverture correspondant aux sections (b) et (c) sont majoritairement en traction. Par conséquent aucun voilement ne peut apparaître dans ces sections.

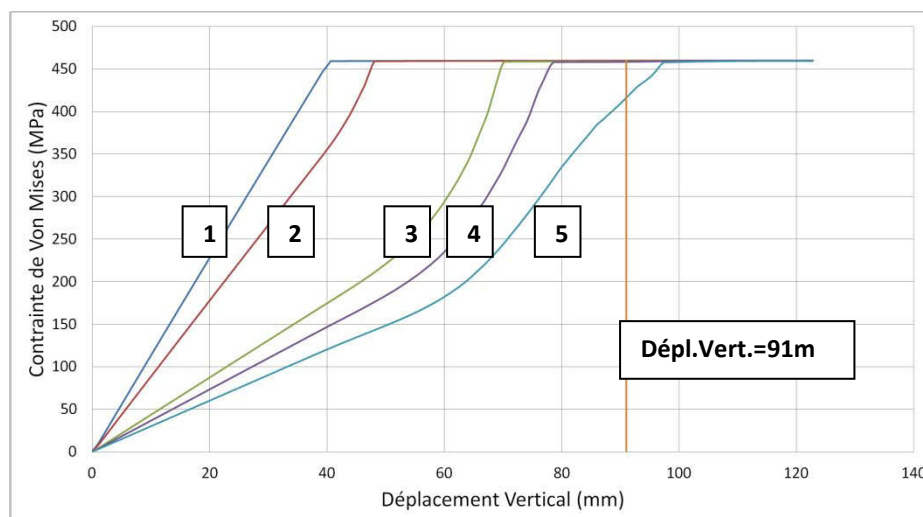


Figure II-37 Evolution des contraintes dans la section (c)

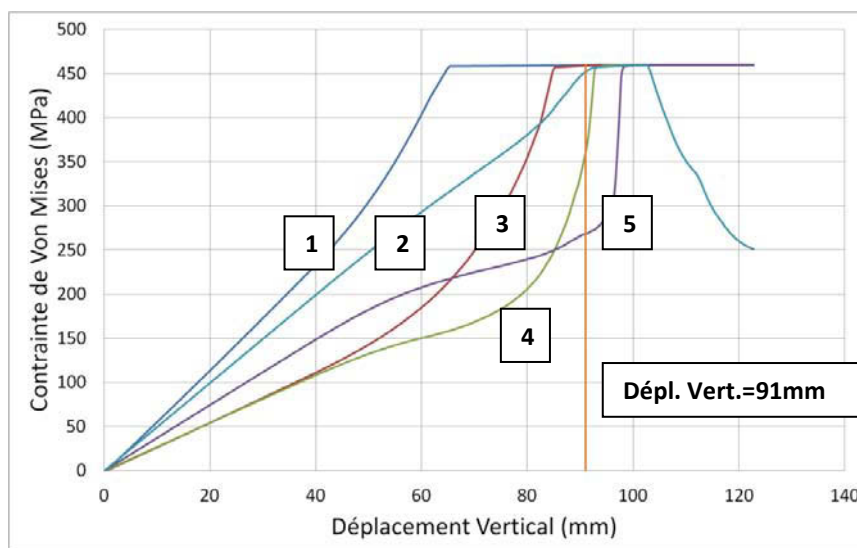


Figure II-38 Evolution des contraintes dans la section (b)

Les contraintes équivalentes de von Mises dans les sections (a) et (d) montrent une chute de contrainte avant que les éléments les plus sollicités n'atteignent leur limite élastique. Cette observation confirme la redistribution d'effort liée à la flexion hors plan qui témoigne de l'existence d'un voilement local des parties comprimées des sections en té. En parallèle avec cette instabilité, les sections des quarts d'ouverture (c) et (b) forment des rotules plastiques. Finalement, la ruine globale de la poutre peut être assimilée à la combinaison de plusieurs ruines locales par voilement ou plastification des quatre quarts d'ouverture autour de l'ouverture critique n°2, en fonction de leurs positions respectives. Les mêmes observations peuvent être faites sur la poutre AS018.

1.5. Bilan

Les études expérimentales ont permis d'observer différents modes de ruine des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales. La confrontation avec les résultats numériques, obtenus à l'aide du modèle MEF développé sur SAFIR, a permis de valider le modèle. En effet, le modèle numérique a montré qu'il était capable de représenter fidèlement le comportement des poutres cellulaires. De plus, nous avons constaté que considérer l'écrouissage dans le comportement de l'acier permet d'améliorer la qualité des résultats, notamment, dans les cas de ruine par plastification. Cependant, un modèle simplifié avec un écrouissage nul reste une bonne approximation et permet de faciliter l'analyse des résultats lors d'études numériques plus détaillées.

Les études numériques et expérimentales ont permis de montrer que pour des poutres avec de grandes ouvertures type AS016 ($a_0/H_{tot}=0,78$), la ruine semble similaire à une ouverture rectangulaire avec la formation de quatre rotules aux quatre coins de l'ouverture. Ensuite, dans le cas d'ouvertures plus petites, la ruine globale est aussi liée à la ruine locale des quatre parties de l'ouverture. En revanche, ces ruines combinent à la fois un voilement local et la plastification de différentes parties de l'ouverture en fonction de leurs positions dans l'ouverture. Ainsi, **la ruine globale correspond à un mécanisme de ruine de l'ouverture critique et non à la ruine isolée d'une seule partie de cette ouverture.**

Ces observations numériques ouvrent ainsi des pistes pour permettre de développer un modèle analytique le plus représentatif de la réalité. Elles montrent notamment que pour définir correctement la résistance d'une partie de l'ouverture, la position de la section critique ne peut pas être déduite de manière forfaitaire dans les cas d'instabilité. Seul un calcul incrémental peut permettre de correctement déterminer la résistance de chaque quart d'ouverture en fonction des sollicitations qui lui sont propres, comme proposé **Figure II-39**.

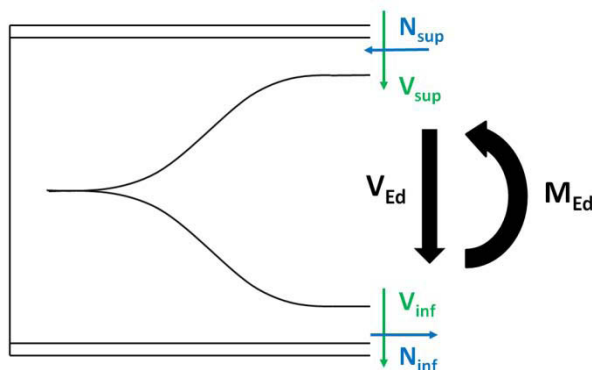


Figure II-39 Distribution des efforts internes dans les membrures supérieures et inférieures d'une ouverture due aux efforts globaux M_{Ed} and V_{Ed}

Le modèle numérique est validé et peut être utilisé pour une étude numérique plus complète. Afin de mieux appréhender la résistance locale de chaque partie de l'ouverture prise séparément, il est proposé d'étudier plus en détail le comportement d'un quart d'ouverture pris isolément. Confronter les résultats MEF obtenus pour un modèle de poutre globale avec le modèle de quart d'ouverture isolé correspondant, peut permettre de mieux comprendre les causes du voilement local dans les parties de l'ouverture en bord libre, soumises à de la compression. Cette étude vise particulièrement à juger de la pertinence des conditions aux limites et hypothèses prises par la théorie qui vérifie la résistance d'une ouverture au travers de la résistance de chaque quart d'ouverture comme proposé **Figure II-40**.

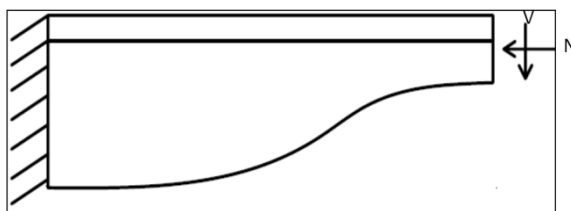


Figure II-40 Représentation du modèle analytique de quart d'ouverture

2. ETUDE NUMERIQUE DES POUTRES A OUVERTURES SINUSOÏDALES

2.1. Ordre de grandeur des écarts MEF/Théorie

Ce paragraphe expose les différences existant entre les approches analytiques et les résultats obtenus par le modèle élément finis. En effet, il est évident que l'hypothèse qui consiste à considérer une rotule plastique parfaite est impossible à obtenir de manière numérique car elle nécessiterait des déformations infinies des fibres extrêmes. Par ailleurs, les calculs MEF sont réalisés en grand déplacements. Le fait de calculer en grands déplacements implique des effets du second ordre qui ne sont pas considérés dans les calculs de RDM et dans la théorie des poutres. Enfin, la géométrie des sections étudiées en théorie peut ne pas être exactement identique avec la géométrie représentée par le modèle éléments finis.

2.1.1. Géométrie d'une section

La **Figure II-41** représente un exemple de section étudiée par le modèle numérique. La modélisation s'effectue à l'aide d'éléments coques. Les éléments sont définis au travers de leurs surfaces moyennes (lignes en pointillés sur la **Figure II-41**). Le fait de représenter les différentes parties de la poutre par des surfaces moyennes implique qu'il existe un recouvrement de surface à l'intersection des lignes moyennes. Ainsi, le modèle numérique ne considère pas de congé de raccordement mais un recouvrement de surface d'aire $A_r = 2 \times t_w \times (t_f/2)$, avec t_w l'épaisseur de l'âme et t_f l'épaisseur de la semelle.

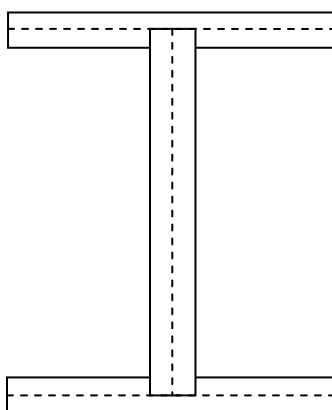


Figure II-41 Représentation d'une section en I sur SAFIR

Il existe donc plusieurs différences entre la théorie et le modèle éléments finis qui impliquent certains écarts de charge ultime. Il s'agit dans la suite de ce paragraphe de donner un ordre de grandeur de ces écarts de charge ultime pour un cas dont la théorie permet d'avoir la solution exacte.

2.1.2. Analyse des écarts entre théorie et MEF

Le cas étudié pour caractériser la précision du modèle numérique par rapport à une solution théorique considérée comme référence est celui d'une poutre en flexion 4 points isostatique à section constante rectangulaire. Ce premier cas permet d'identifier l'importance des écarts liés à la plastification et aux calculs en grands déplacements. Ensuite, le même calcul est effectué pour une section en IPE pour laquelle la section théorique considère le congé de raccordement ; ceci dans le but d'identifier les valeurs des écarts possibles entre deux modèles qui sont proches de ceux utilisés par la suite.

Pour évaluer la précision de la modélisation des phénomènes élasto-plastiques, le cas d'une poutre en flexion 4 points est analysé. Deux types de sections sont utilisés. Une section rectangulaire et une section de profilé IPE 400. Les résultats du calcul éléments finis sont comparés aux solutions analytiques connues. Les deux poutres sont représentées en éléments coques. La section rectangulaire est modélisée avec des éléments coques verticaux (la largeur de la section est donc considérée au travers de l'épaisseur des éléments coques). Les dimensions des poutres sont résumées sur la **Figure II-42** et dans le **Tableau II-6**. De plus, le **Tableau II-6** donne l'effort F_{pl} correspondant à l'effort de plastification théorique des deux poutres.

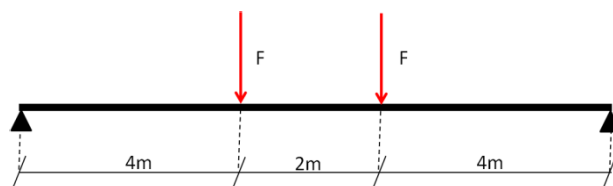


Figure II-42 Représentation de la configuration de chargement de la poutre

	Section rectangulaire	Section IPE 400
Longueur (m)	10	
Hauteur (mm)	200	400
Largeur (mm)	100	180
Limite élastique f_y (MPa)	235	235
Moment plastique : M_{pl} (kN.m)	235	307
F_{pl} (kN)	59	77

Tableau II-6 Caractéristiques des poutres à sections rectangulaire et IPE 400

Les **Figure II-43** et **Figure II-44** donnent les courbes force-déplacement obtenues par calcul MEF non-linéaire. Les valeurs maximales de chacune des deux courbes sont considérées comme les efforts ultimes de chacune des deux poutres.

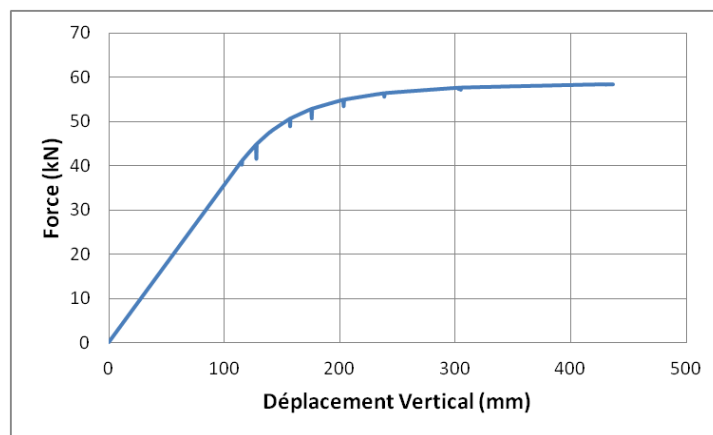


Figure II-43 Diagramme force-déplacement pour la section rectangulaire

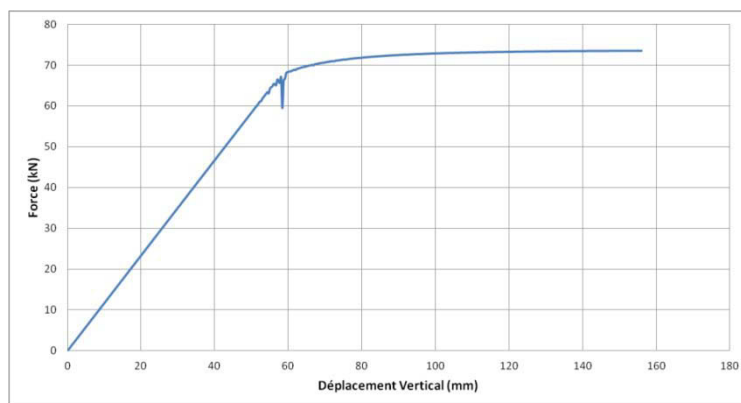


Figure II-44 Diagramme force-déplacement pour la section IPE400

Le **Tableau II-7** compare les efforts ultimes calculés analytiquement avec ceux déduits des courbes obtenues par éléments finis.

	Section Rectangulaire	Section IPE 400
$F_{ult, \text{théorique}}$	58.8kN	76.8kN
$F_{ult, \text{MEF}}$	58.4kN	73.6kN
Ecart %	0.6	4.3

Tableau II-7 Comparaison effort ultimes théoriques et numériques pour les deux types de sections étudiées

Nous pouvons constater que pour le cas étudié de la section rectangulaire, le calcul MEF donne une valeur du moment plastique très proche de celle obtenue analytiquement (écart de l'ordre de 0,6 %). Ainsi, le modèle représente de façon très satisfaisante l'évolution de la plastification sur la hauteur de la section rectangulaire. En revanche l'écart est plus important pour un calcul avec une section telle qu'un IPE 400. Cet écart est lié au fait que le modèle numérique ne considère pas le congé de raccordement. De plus, il est possible que le logiciel considère moins bien

la redistribution des efforts dans l'épaisseur des éléments constituant les semelles du profilé IPE. Cette dernière étude nous permet ainsi de nous faire une idée des écarts possibles de charge plastique entre le modèle analytique et le modèle MEF pour les prochains calculs. Un écart autour de 5% pourra ainsi être considéré comme acceptable si cet argument est accompagné d'une étude fine permettant de mettre en évidence la plastification de section sur le modèle MEF, notamment au travers d'une analyse des contraintes dans la section.

2.2. Etude numérique détaillée

Afin de développer un modèle analytique fiable et représentatif du comportement des poutres cellulaires il est nécessaire de bien caractériser la répartition des contraintes autour des ouvertures les plus sollicitées à l'état ultime. Plusieurs hypothèses servent au modèle numérique, d'une part au niveau des sollicitations (hypothèse d'un point d'inflexion au droit de l'ouverture...) et d'autre part au niveau des conditions aux limites des quarts d'ouverture qui sont vérifiées analytiquement séparément. Le premier objectif de cette partie est d'étudier la pertinence des différentes hypothèses émises analytiquement pour pouvoir in fine soit améliorer, soit développer un nouveau modèle analytique.

L'objectif premier est d'apporter un regard critique sur le modèle analytique, c'est pourquoi l'étude se focalise sur deux modèles distincts, un modèle représentant une poutre à ouverture sinusoïdale en configuration d'essai (le modèle de poutre globale illustré **Figure II-45**) et un modèle numérique qui représente un quart d'ouverture seul, soumis à des sollicitations déduites de la théorie à partir du modèle de poutre globale (le modèle de quart d'ouverture isolé). L'**Annexe A** rappelle les termes servant à décrire les différents modèles géométriques étudiés.

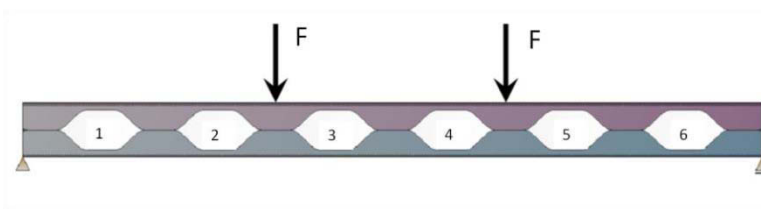


Figure II-45 Configuration du modèle de poutre globale

La répartition des efforts globaux autour d'une ouverture se déduit de l'hypothèse de poutre échelle. Au droit de l'ouverture les efforts globaux sont équilibrés par des efforts locaux dans chacune des deux membrures de l'ouverture comme illustré à la **Figure II-46**.

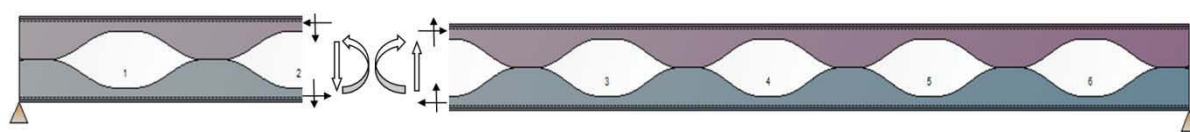


Figure II-46 Représentation de la discrétisation des efforts globaux au droit de l'ouverture 2

2.2.1. Etude comparative

L'étude est menée à l'état limite ultime. Ainsi, les calculs sont lancés en chargement contrôlé pour le modèle de poutre globale et de quart d'ouverture. La modélisation du quart d'ouverture nécessite un chargement dans deux directions perpendiculaires, une modélisation en déplacement contrôlé est de ce fait impossible. C'est pourquoi le chargement du modèle de quart d'ouverture sera appliqué en contrôle de force. Ainsi, le chargement lié à N et V est augmenté de manière incrémentale. La configuration de poutre globale en flexion 4 points permet d'avoir une relation simple de proportionnalité entre les efforts N et V du modèle de quart d'ouverture et simplifie le chargement. Le moment fléchissant global sur la poutre peut s'écrire en fonction de l'effort F sollicitant :

$$M(F)_{Ed} = F \times \zeta \quad \text{Equation II-1}$$

Avec, ζ : abscisse du milieu de l'ouverture étudiée par rapport au repère global.

L'effort tranchant global V peut s'écrire en fonction de l'effort sollicitant F tel que:

$$V(F)_{Ed} = F \quad \text{Equation II-2}$$

L'effort normal N_{sup} (effort axial dans la membrure supérieure) et l'effort tranchant V_{sup} (effort tranchant dans la membrure supérieure) peuvent être déduit en fonction de l'abscisse ζ tel que :

- $N_{sup}(\zeta) = N_{inf}(\zeta) = M(\zeta)_{Ed}/d_G$
- ζ : abscisse le long de la poutre
- $V_{sup} = V_{inf} = V_{Ed}/2$

Le coefficient $K(\zeta)$ de relation proportionnelle entre l'effort axial et l'effort tranchant dans chaque quart d'ouverture s'écrit tel que :

$$K(\zeta) = \frac{N_{sup}}{V_{sup}}(\zeta) = \frac{2 \times \zeta}{d_G} \quad \text{Equation II-3}$$

Cette relation de proportionnalité permet de modéliser le quart d'ouverture souhaité avec les mêmes conditions de chargement que celles supposées du même quart d'ouverture dans la poutre globale. La comparaison de ces deux modèles va ainsi permettre d'évaluer la représentativité du modèle de quart d'ouverture.

La première comparaison est réalisée pour la géométrie de la poutre AS012 (configuration d'ouverture standard) et les deux quarts d'ouvertures correspondant (comprimé et tendu) représentés sur les **Figure II-47** et **Figure II-48**. En effet, les essais et la modélisation ont montré que

la ruine par instabilité se produit dans ces deux quarts d'ouverture, avec un déplacement hors plan dans les deux parties sinusoïdales.

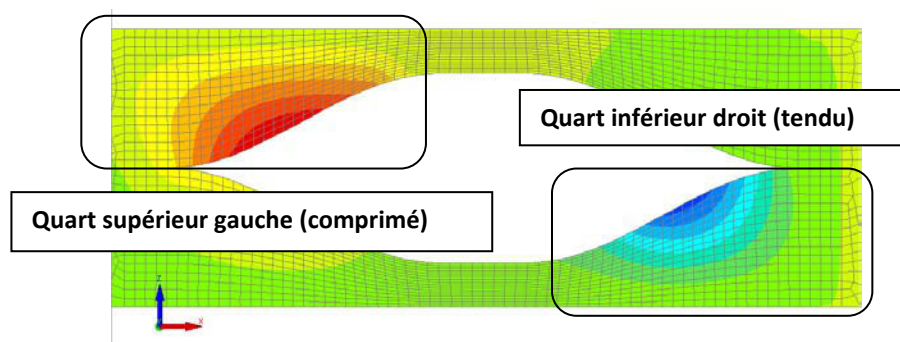


Figure II-47 Représentation des iso-déplacement hors plan d'une ouverture et définition des deux quarts d'ouverture étudiés

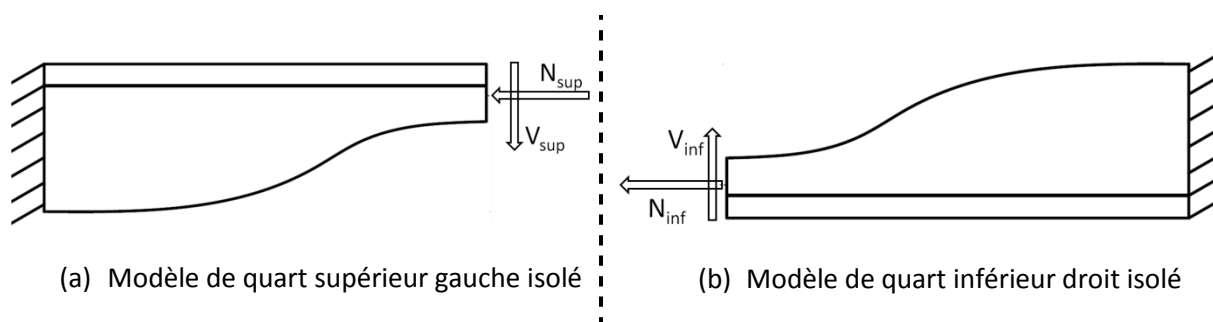


Figure II-48 Illustration des deux modèles de quart d'ouverture isolés critiques

Les premières comparaisons du modèle de quart d'ouverture comprimé (**Figure II-48 (a)**) avec la poutre globale montrent une charge ultime du quart d'ouverture inférieure d'environ 10% à celle de la poutre globale. Ceci est dû à un problème d'instabilité de nœud induit par un chargement de compression ponctuel du quart d'ouverture. Cette instabilité n'existe pas dans le cas du quart d'ouverture tendu (**Figure II-48 (b)**). La partie suivante entre dans le détail de la répartition de contrainte dans le quart d'ouverture comprimé, isolé et en tant que partie de la poutre globale.

2.2.2. Etude des contraintes sur la longueur de la sinusoïde

La comparaison des contraintes sur la longueur de la sinusoïde, entre l'ouverture de la poutre et le modèle de quart seul, permet d'évaluer la représentativité du modèle du quart au regard des sollicitations. La **Figure II-49** donne une première comparaison des contraintes en fibre extrême de la section critique entre les modèles MEF de poutre globale, de quart d'ouverture isolé comprimé. De plus le calcul analytique, basée sur les règles de la résistance des matériaux permet d'évaluer la contrainte sollicitante induite par flexion Vierendeel au niveau de la fibre extrême de la section critique du modèle de quart d'ouverture isolé. La **Figure II-49** permet de comparer la contrainte sollicitante déduite analytiquement avec celles obtenues au travers des deux modèles numériques.

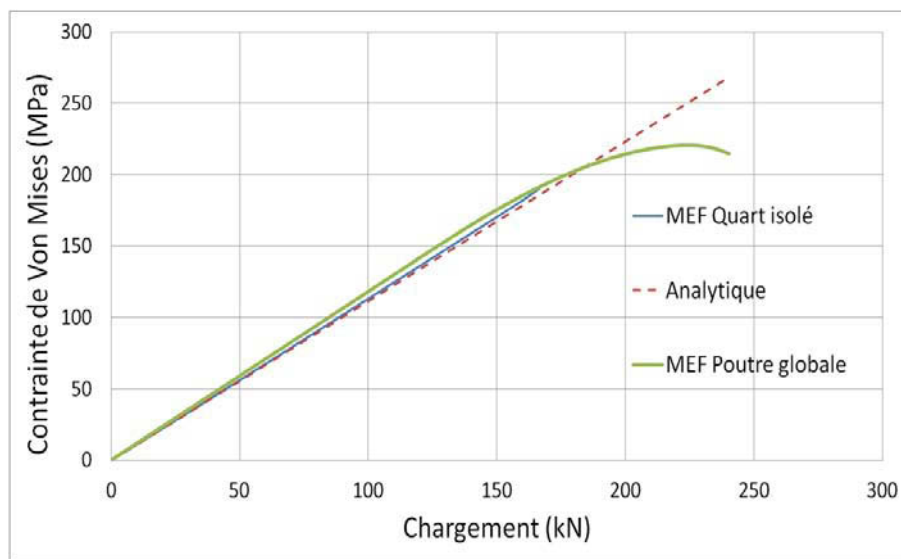


Figure II-49 Diagramme comparant les contraintes obtenues pour les modèles MEF de poutre globale, de quart isolé et le modèle analytique.

Nous observons sur la **Figure II-49** que le modèle analytique représente bien la valeur de la contrainte de compression induite par flexion Vierendeel dans l'élément correspondant à la section critique du modèle de poutre globale jusqu'à atteindre une certaine plastification. Cette première observation permet déjà de conforter l'hypothèse prise analytiquement sur les sollicitations.

Les diagrammes ci-dessous (**Figure II-52** à **Figure II-54**) comparent les contraintes obtenues sur la longueur de la sinusoïde pour la poutre globale et pour le modèle de quart d'ouverture (pour la légende, se référer à la **Figure II-51**). Deux conditions d'appui du quart d'ouverture sont considérées pour évaluer l'influence du maintien en rotation apporté par le montant d'âme adjacent. La **Figure II-50** montre les deux conditions d'appui considérées (articulation ou encastrement). Ces conditions traduisent l'apport du montant d'âme sur la rigidité réelle de la paroi sinusoïdale.

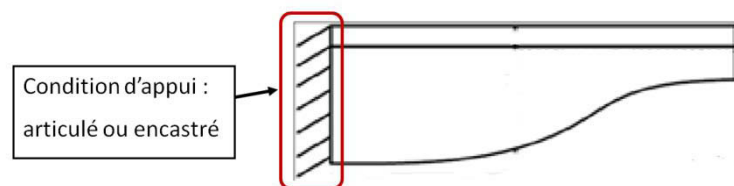


Figure II-50 Représentation du quart d'ouverture avec la condition d'appui ou d'encastrement à son extrémité

Les modélisations de la poutre globale et du quart d'ouverture sont réalisées avec le même nombre d'éléments sur la longueur de la sinusoïde.

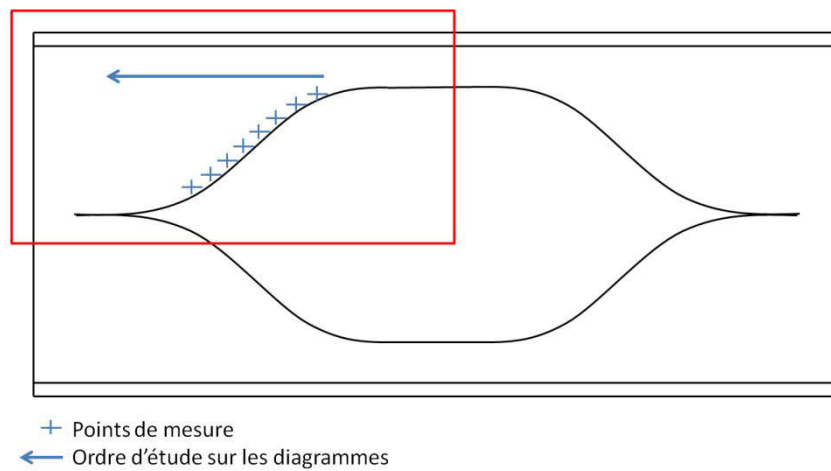


Figure II-51 Points étudiés sur la longueur de la sinusoïde des modèles MEF (poutre globale et quart d'ouverture isolé)

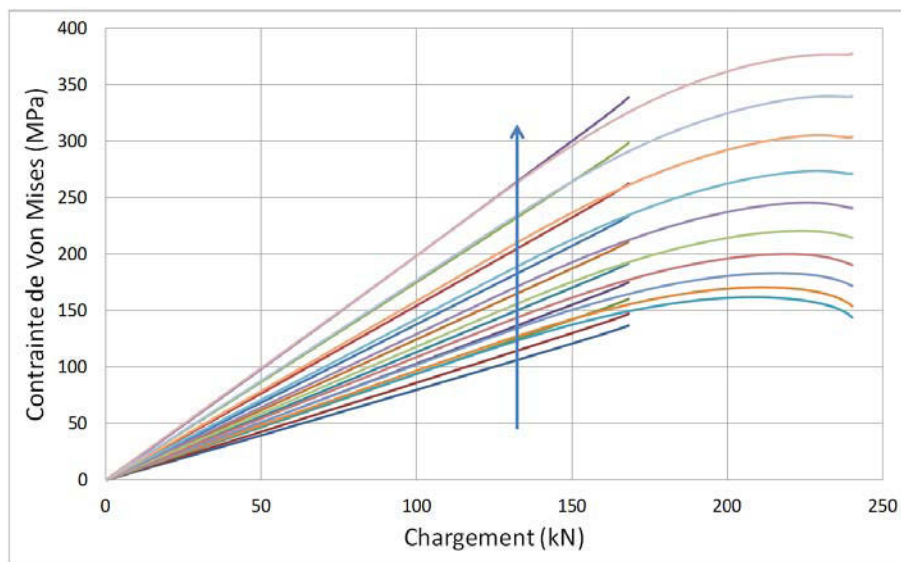


Figure II-52 Comparaison des contraintes de von Mises sur la longueur de la sinusoïde entre le modèle MEF de poutre globale et celui du quart d'ouverture isolé comprimé articulé

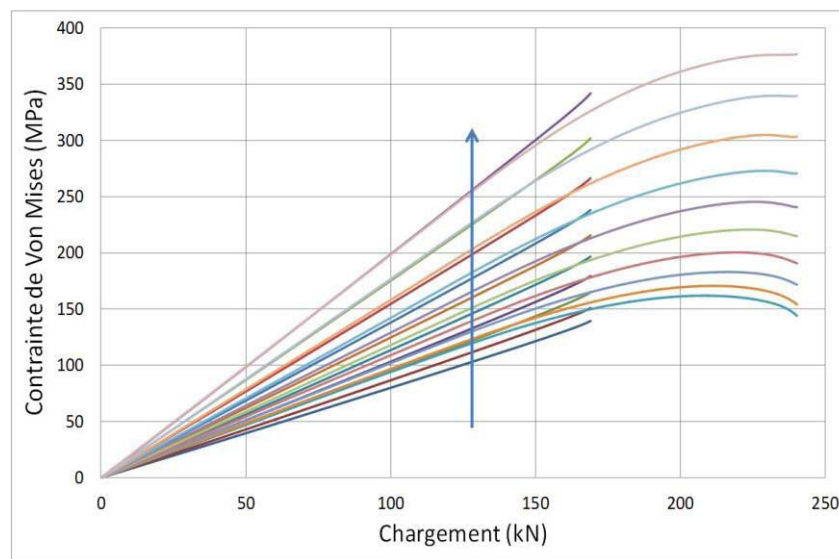


Figure II-53 Comparaison des contraintes de von Mises sur la longueur de la sinusoïde entre le modèle MEF de poutre globale et celui du quart d'ouverture isolé comprimé encastré

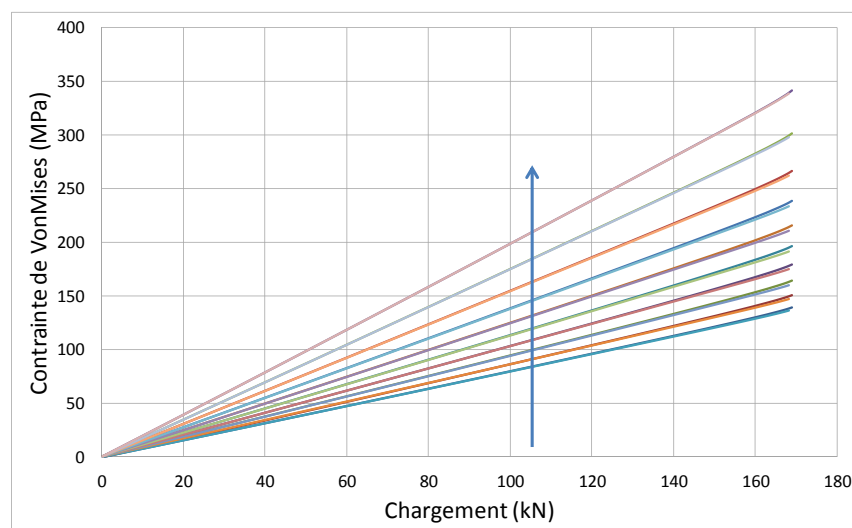


Figure II-54 Comparaison des contraintes de von Mises sur la longueur de la sinusoïde entre le modèle MEF de quart d'ouverture isolé comprimé articulé et encastré

Les comparaisons des courbes d'évolution des contraintes de von Mises, sur la longueur de la sinusoïde, en fonction de la charge appliquée (**Figure II-52** à **Figure II-54**) montrent des résultats assez concordants entre les différents modèles étudiés. Les courbes du modèle de quart d'ouverture et de la poutre globale se superposent. Ceci montre que pour la même valeur de charge, le modèle de quart d'ouverture isolé est équivalent à celui appartenant à la poutre globale et confirme l'observation faite sur la **Figure II-49**. Cette concordance du modèle analytique avec le modèle de quart d'ouverture reste valable du moment que l'on reste dans le domaine élastique et qu'aucune redistribution élastoplastique ne s'opère autour de l'ouverture ou au sein d'un même quart d'ouverture. De plus, il peut être observé sur la **Figure II-54** qu'il n'y a aucune différence entre les

deux modèles de quart d'ouverture encastré et articulé. En ce qui concerne la répartition des contraintes sur la longueur de la sinusoïde, les courbes se superposent parfaitement.

Cette étude nous a permis de constater que le modèle de quart d'ouverture peut fournir une bonne représentation de la distribution des contraintes en bord libre, lieu d'initiation de l'instabilité. L'étude qui suit cherche à mieux étudier la répartition de ces contraintes sur la hauteur de la section critique.

2.2.3. Etude des contraintes dans la section critique

Les premières comparaisons faites sur la fibre extrême mettent en évidence la bonne concordance des contraintes sollicitantes sur la fibre en bord libre le long de la sinusoïde pour les modèles de quart seul, de poutre globale et analytique. Cependant, il est intéressant d'étudier cette répartition sur la hauteur des sections. Pour ce faire, cinq points (1, 2, 3, 4, 5) sont observés dans l'âme du T de la section critique (où le déplacement latéral est le plus élevé). Les évolutions des contraintes sur ces cinq points en fonction de la charge appliquée sont illustrées sur la **Figure II-55**.

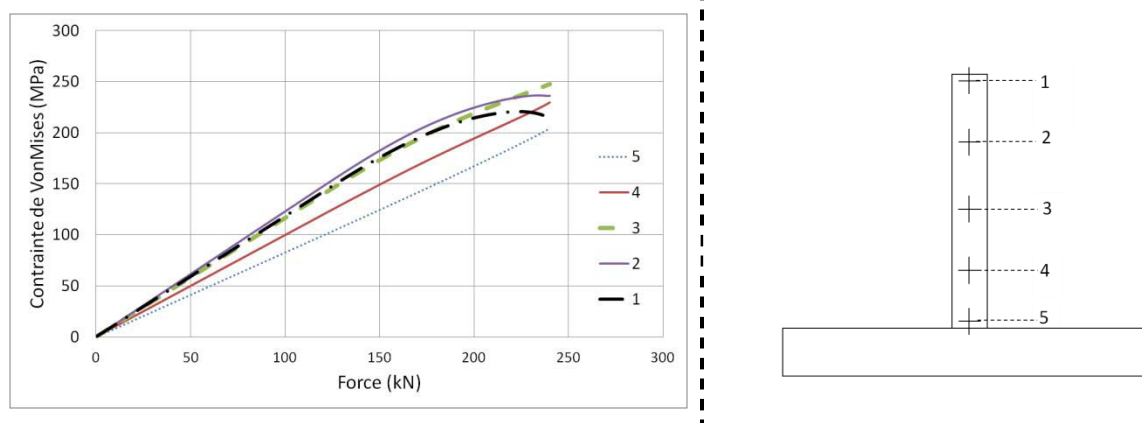


Figure II-55 Diagramme représentant la répartition des contraintes sur la section critique

On peut remarquer que pour le modèle de poutre globale, les contraintes n'évoluent pas de façon linéaire traduisant un comportement élastique. Sur les calculs MEF, de la poutre globale, les contraintes des points 2 et 3 sont supérieures à celle de l'élément 1 en bord libre d'ouverture (fibre extrême où il devrait résider les contraintes maximales). Nous pouvons donc supposer que les éléments ne peuvent pas atteindre leurs limites élastiques et sont soumis à une instabilité. Cette observation est directement en accord avec les observations faites durant l'étude des résultats expérimentaux et numériques de la partie précédente.

Il faut rappeler que les contraintes observées à la **Figure II-55** sont calculées dans le plan moyen des éléments. La chute de contrainte reprise par les éléments proches du bord libre de l'ouverture (éléments 1 et 2) est caractéristique d'un voilement local. Elle est due à l'influence des contraintes de peau de ces éléments qui, du fait d'une flexion locale combinée au critère de plastification de von Mises, réduisent leurs contraintes moyennes. Ce phénomène a pu être clairement observé sur le modèle de quart d'ouverture dans le paragraphe suivant (**Figure II-57**).

Afin de s'affranchir de l'influence de la plastification locale et de limiter l'étude au voilement local et à l'influence de la flexion hors plan, les comparaisons ci-après sont effectuées en phase élastique.

2.2.4. Etude des contraintes de peau

Il s'agit d'étudier l'évolution des contraintes de peau pour un exemple de quart d'ouverture et voir leurs évolutions en fonction du déplacement maximal hors plan. Le quart d'ouverture est modélisé à l'aide d'éléments coque à quatre nœuds, quatre points de Gauss sur la surface. Pour cette étude, le choix s'est porté sur 9 points d'intégration sur l'épaisseur de chaque élément coque. L'étude des déplacements hors plan révèle que les trois éléments 9, 10 et 11 ont les déplacements hors plan maximum et sont repérés sur la **Figure II-56**. Sur les 9 points d'intégration dans l'épaisseur des éléments coques, seuls les deux points extrêmes (notés a et b sur la **Figure II-56**) seront étudiés.

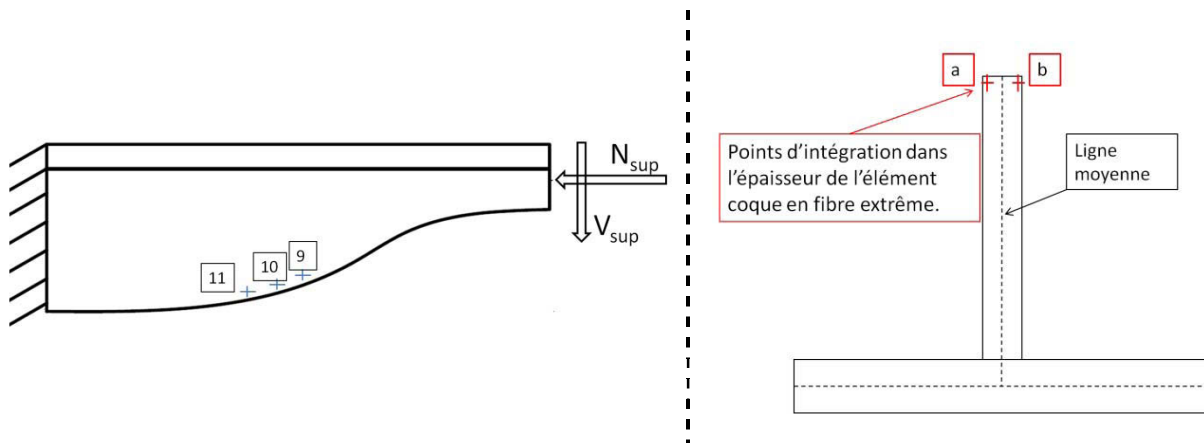


Figure II-56 Présentation des éléments coques étudiés et des deux points d'intégration extrêmes sur l'épaisseur des éléments (a et b)

L'histogramme de la **Figure II-57** donne pour chaque élément coque étudié, les contraintes équivalentes de von Mises obtenue sur le 1^{er} et le 9^{ème} point d'intégration dans l'épaisseur de l'élément coque, soit sur les points a et b des éléments 9, 10 et 11.

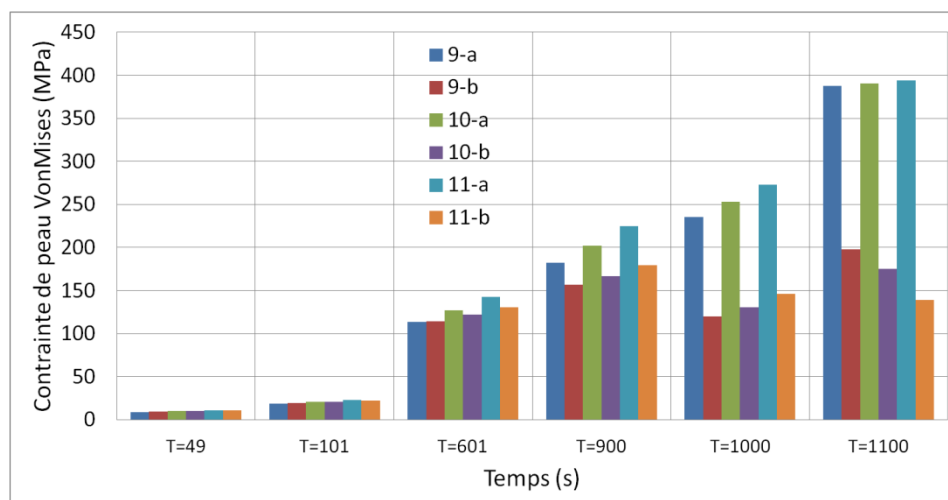


Figure II-57 Diagramme comparant les contraintes de peau des éléments 9, 10, 11 au niveau des points de Gauss extrêmes a et b dans l'épaisseur des éléments coques

La **Figure II-57** montre que la chute de contrainte moyenne observée à la **Figure II-58** correspond avec la forte variation opposée des contraintes de peau. Cette baisse de contrainte est, de plus, en accord avec l'accélération du déplacement hors plan des nœuds de cette zone (voir **Figure II-59**), ce qui dénote l'apparition pour une certaine contrainte critique d'une flexion locale hors plan caractéristique d'une instabilité.

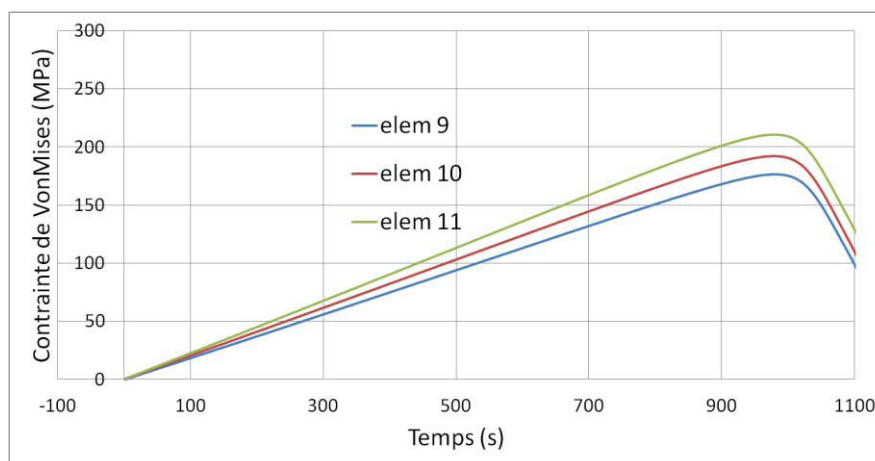


Figure II-58 Diagramme représentant les contraintes de la fibre moyenne des éléments coques 9, 10 et 11

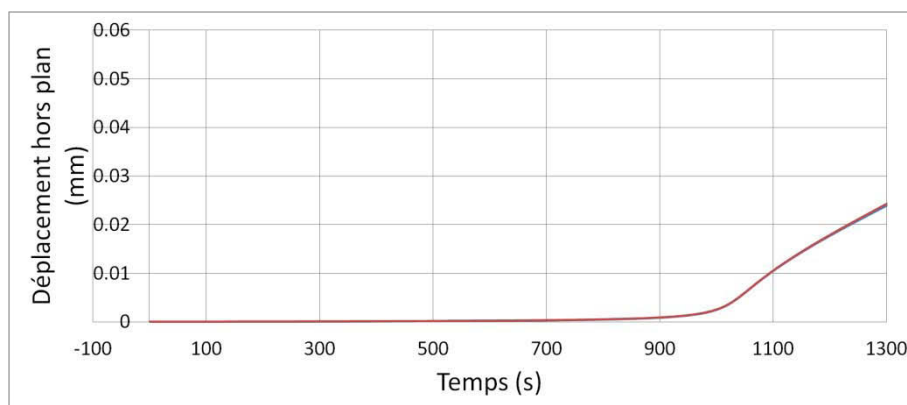


Figure II-59 Déplacement hors plan du point en bord libre de l'élément coque 10

Ces deux premières études ont permis d'identifier deux choses :

- Le modèle simplifié de quart d'ouverture représente fidèlement la distribution élastique de contrainte le long de la sinusoïde.
- Le bord libre de la paroi sinusoïdale est très propice à instabilité. Une fois qu'elle s'amorce, combinée à une possible plastification, l'instabilité induit une redistribution de contrainte dans la section rendant difficile la comparaison des différents modèles et l'étude de la pertinence du modèle analytique.

Le choix s'est donc porté de travailler sur l'instabilité élastique. Le modèle de quart d'ouverture fournit une bonne estimation de la répartition élastique des contraintes. Cependant plusieurs phénomènes altèrent cette répartition, notamment les phénomènes de plastification ou d'instabilité. Il va de soi que les conditions aux limites appliquées au quart jouent un rôle important dans la rigidité du quart d'ouverture et donc dans sa résistance, ce qui n'était pas évident lors des études élastoplastiques (voir **Figure II-54**). C'est pourquoi, une étude élastique est menée, afin d'analyser l'influence des conditions aux limites appliquées au quart d'ouverture seul sur sa résistance à l'instabilité élastique par rapport au modèle de poutre globale en élasticité pure.

2.2.5. Etude des conditions aux limites du quart d'ouverture

Il s'agit dans cette partie, de comparer les valeurs des contraintes obtenues dans le modèle de poutre globale (MEF poutre globale), de quart d'ouverture appuyé à son extrémité (MEF quart appuyé) et celui encasté à son extrémité (MEF quart encasté) pour un calcul non linéaire avec une limite d'élasticité infinie, ce qui écarte toute influence de plastification.

Une première comparaison des iso-déplacements hors plan entre le modèle de poutre globale, de quart d'ouverture encasté et de quart d'ouverture appuyé permet de mettre en avant le fait que la section critique change suivant la condition d'appui. En effet, le fait de maintenir en rotation la ligne d'appui du modèle de quart d'ouverture écarte la zone de déplacement hors plan. Ainsi, la section critique pour le cas du quart d'ouverture encasté se retrouve moins élancée et donc plus résistante (voir **Figure II-60** et **Figure II-61**).

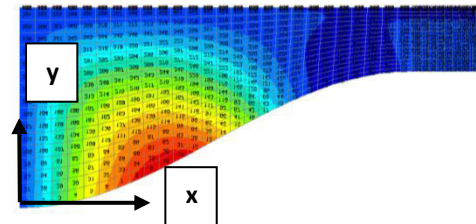
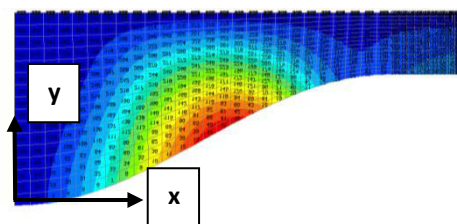
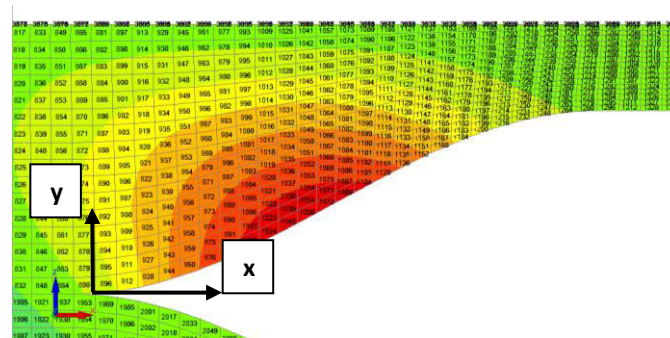


Figure II-60 Déplacements hors plan modèle global (en haut), quart appuyé (à droite), quart encastré (à gauche)

Le modèle de poutre globale donne une position de section critique (zone de déplacement maximum hors plan) qui se situe entre les deux positions observées dans les deux cas de quart d'ouverture modélisés. En effet, en repérant l'abscisse de la section verticale qui a le maximum de déplacement hors plan par l'abscisse x_{cr} , cela donne pour les différents modèles présentés en **Figure II-60** :

- poutre globale, $x_{cr} = 271,9$ mm
- quart d'ouverture appuyé, $x_{cr} = 226,2$ mm
- quart d'ouverture encastré, $x_{cr} = 342$ mm

Ensuite, le diagramme de la **Figure II-61** compare les contraintes moyennes de l'élément en fibre extrême de déplacement hors plan maximal pour le modèle de poutre globale, de quart d'ouverture appuyé et celui encastré.

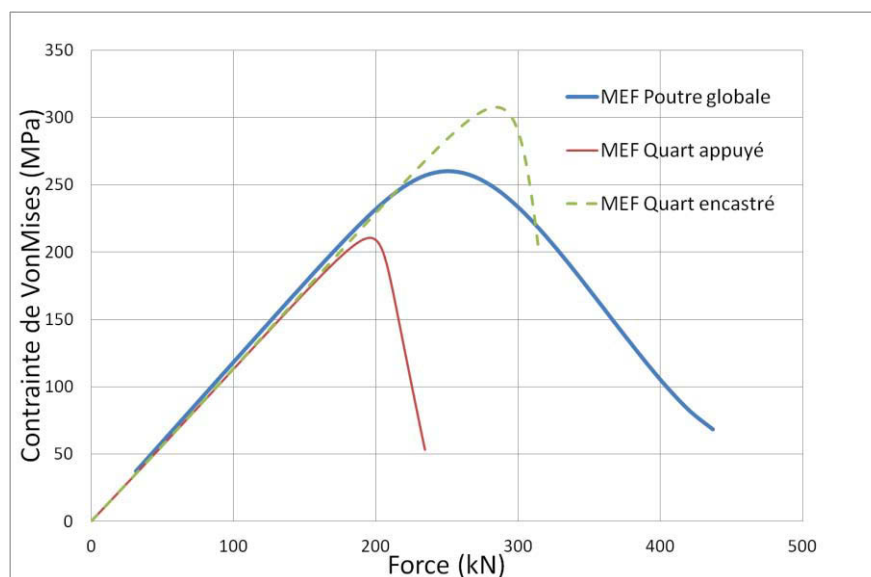


Figure II-61 Diagramme comparant les contraintes en bord libre de l'élément le plus sollicité

Le diagramme de la **Figure II-61** montre une nette influence de la condition d'appui du quart d'ouverture sur l'évolution de la contrainte dans l'élément en bord libre. La contrainte ultime (élastique) dans les deux modèles de quart d'ouverture n'est pas la même ; l'élément du quart d'ouverture encastré a une contrainte ultime élastique nettement supérieure à celle du même quart simplement appuyé (articulé). Ce diagramme permet d'observer que le modèle de poutre globale se situe entre les deux courbes des modèles de quart d'ouverture isolés. Cette observation permet de conforter l'hypothèse que la rigidité de la paroi sinusoïdale d'un quart d'ouverture au sein d'une ouverture de poutre cellulaire a un comportement intermédiaire entre celui d'un quart simplement appuyé et d'un quart encastré. Cette observation est très intéressante car elle permet de justifier l'existence **d'une semi-rigidité rotationnelle de la connexion** du quart d'ouverture avec le montant d'âme adjacent.

Cette semi-rigidité (maintien rotationnel élastique) doit bien évidemment varier suivant les formes géométriques d'ouvertures et autres conditions de chargement ou d'appui de la poutre globale. Cependant, si nous cherchons à caractériser de manière précise la résistance de la poutre et donc du quart d'ouverture alors, il faut se concentrer sur l'influence des paramètres géométriques sur la semi-rigidité de l'appui du quart d'ouverture car cette semi-rigidité influe directement sur la stabilité de la paroi sinusoïdale constituant le quart d'ouverture. Cette nouvelle information ouvre ainsi une piste d'investigation pour améliorer le calcul de stabilité de cette paroi sinusoïdale.

Enfin, nous avons pu constater au travers de ces études numériques que la meilleure façon de caractériser cet appui était de se placer en situation purement élastique. La modélisation en élasticité pure permet de ne pas parasiter les résultats avec d'éventuelles redistributions plastiques qui empêchent de correctement considérer l'apport du montant adjacent dans la rigidité du quart d'ouverture, notamment dans le cas d'ouvertures peu soumises à instabilité. C'est pourquoi, nous avons choisi de baser l'étude suivante sur un calcul de mode propre d'instabilité (ou étude eulérienne).

Ainsi, dans le but de pouvoir explorer tous les cas de figure et déterminer la rigidité de l'appui pour n'importe quelle configuration d'ouverture, nous choisissons d'élaborer une étude paramétrique de poutre globale. Elle est effectuée avec les mêmes conditions de chargement pour définir au mieux la rigidité à apporter au quart d'ouverture.

2.2.6. Etude Eulérienne

Cast3m est un outil de calcul par éléments finis permettant d'effectuer des calculs non-linéaires, comprenant des non-linéarités matérielles. Il peut effectuer une étude eulérienne des modes propres d'instabilité, afin de définir les imperfections initiales les plus pénalisantes. Ce modèle sera très utile pour l'étude des contraintes critiques de voilement des différents modèles précédemment étudiés avec SAFIR. Nous allons tout d'abord présenter une brève comparaison des résultats fournis par CAST3M avec des calculs analytiques sur des modèles simples pour lesquels les résultats sont connus. Ceci nous permettra de définir la densité de maillage pour laquelle nous obtenons une bonne estimation du résultat de calcul de mode propre de voilement.

- Plaque simplement appuyée sur ses 4 bords comprimée uniformément sur deux bords opposés :

Le calcul analytique fournit une formule donnant la contrainte critique d'une telle plaque :

$$\sigma_{cr} = 4 \times \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \times \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Avec :

- t : épaisseur de la plaque
- b : largeur de la plaque
- k_σ : coefficient de contrainte critique fonction du chargement et de la forme de plaque ; pris égal à 4 pour une plaque carrée

Le **Tableau II-8** résume les résultats obtenus avec le modèle MEF CAST3M ($F_{cr, MEF}$) et les compare à la théorie ($F_{cr, théo}$) pour différentes configurations géométriques de plaques et différentes densités de maillage (avec n_a : nombre d'élément sur la longueur a et n_b : nombre d'éléments sur la largeur de plaque b).

a = b (mm)	t (mm)	n_a	n_b	$F_{cr, MEF}$	$F_{cr, Théo}$	Ecart %
20	2	20	20	6787,5	7592	10,6%
20	2	100	100	6651	7592	12,39%
200	2	20	20	76,91	75,92	-1,3%
200	2	50	50	75,94	75,92	-0,03%
200	2	70	70	75,73	75,92	0,24%
200	2	100	100	75,57	75,92	0,46%

Tableau II-8 Comparaison des résultats MEF et analytiques de contrainte critique pour diverses configurations géométriques de plaque appuyée

Cette première étude permet de constater que 50 éléments sur une longueur de plaque de 200 mm suffisent à obtenir une précision acceptable. La densité de maillage utilisée habituellement dans les modélisations de quart d'ouverture correspond au double.

- Plaque encastrée sur les 2 bords chargés uniformément :

Le calcul analytique fournit une formule donnant la contrainte critique d'une telle plaque :

$$\sigma_{Cr} = 6.97 \times \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \times \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Avec :

- t : épaisseur de la plaque
- b : largeur de la plaque
- Le coefficient de voilement k_σ a été pris égal à 6.97, ce qui correspond au cas de la plaque carrée encastrée sur les bords non chargés.

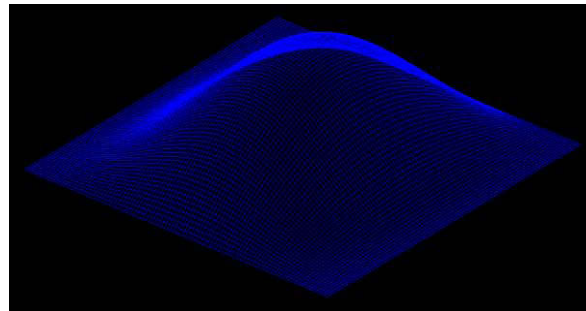


Figure II-62 Premier mode d'instabilité de la plaque encastrée sur les 2 bords uniformément comprimés

Le modèle théorique de calcul de contrainte critique d'une plaque encastrée donne $\sigma_{cr} = 132.29$ MPa alors que le modèle MEF donne $\sigma_{cr} = 147.03$ MPa. Le **Tableau II-9** résume les résultats obtenus avec CAST3M pour une plaque uniformément comprimée sur deux bords opposés pour différentes valeurs du coefficient de maintien rotationnel k_θ appliqué au niveau des bords appuyés. Cette étude a pour objectif de donner les ordres de grandeur de ce coefficient de maintien rotationnel, afin d'estimer pour quelles valeurs il peut être considéré comme représentatif d'un encastrement ou d'un appui.

a = b (mm)	t (mm)	n _a	n _b	k _θ (N.mm/rad)	F _{cr, MEF} (MPa)	F _{cr, Théo.} (MPa)
200	2	50	50	0	75,94	132,29
200	2	50	50	1000.	78,39	132,29
200	2	50	50	1x10 ⁶	145,89	132,29
200	2	50	50	1x10 ⁸	147,01	132,29

Tableau II-9 Etude de l'influence d'un coefficient de semi-rigidité sur la charge critique d'une plaque uniformément comprimée

Cette seconde étude permet de donner les ordres de grandeurs du coefficient de maintien rotationnel k_θ appliqué à la plaque : soit un appui simple ($k_\theta = 0$ N.mm/rad), soit un encastrement ($k_\theta = 10^8$ N.mm/rad) car pour $k_\theta = 10^8$ on constate que l'effort critique MEF est égal à celui obtenu par le logiciel en considérant un encastrement.

2.2.7. Etude du coefficient k_θ basée sur le modèle de poutre globale

La **Figure II-63** présente l'analyse du premier mode d'instabilité de la poutre globale modélisée sur CAST3M. La poutre modélisée est celle correspondant à la configuration de poutre AS012 de l'essai. L'étude eulérienne menée grâce au modèle développé sur CAST3M permet d'obtenir l'effort critique pour lequel le premier mode de voilement de la poutre est atteint. Il s'avère que ce premier mode d'instabilité correspond à celui observé préalablement sur SAFIR en élasticité pure (modèle avec une limite élastique infinie). Il correspond à une instabilité dans le quart comprimé de la seconde ouverture (**Figure II-63**).

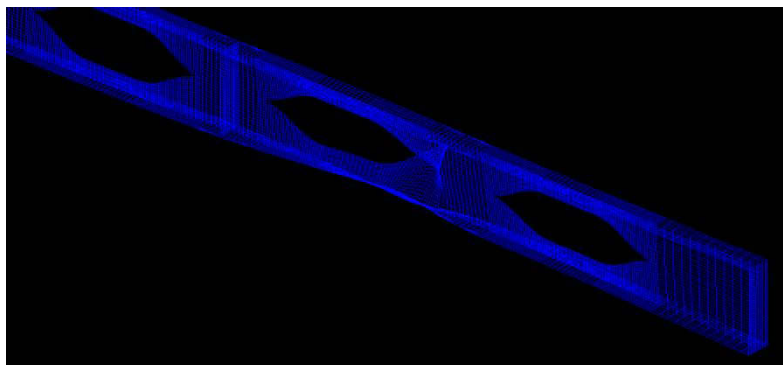


Figure II-63 Premier mode d'instabilité d'une poutre globale avec instabilité locale de la seconde ouverture

Précédemment, il a été constaté que la liaison entre les quarts d'ouverture et le montant d'âme intermédiaire pouvait être considérée comme semi-rigide. Cette semi-rigidité a pu être mise en évidence au travers d'une étude dans le domaine élastique. Par conséquent, le meilleur moyen trouvé pour caractériser cette semi-rigidité a été d'utiliser un calcul de mode propre de voilement. Ce calcul est donc mené sur les modèles de poutre globale et de quart d'ouverture isolé sur lequel est inséré un maintien élastique rotationnelle au niveau de la ligne d'appui comme décrit **Figure II-64**.

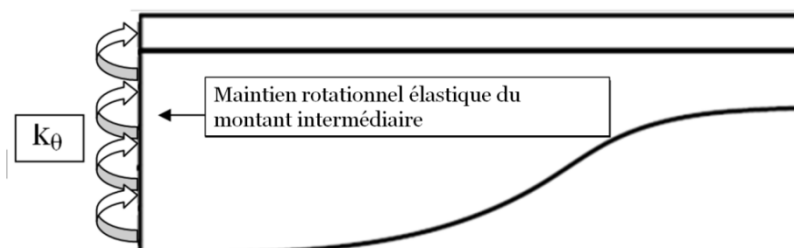


Figure II-64 Modèle de quart d'ouverture seul avec maintien rotationnel

La comparaison de la charge critique du modèle de poutre globale avec celle du modèle de quart d'ouverture isolé correspondant permet de calibrer le coefficient k_θ du modèle de quart d'ouverture (**Figure II-64**). On retrouve ainsi une charge critique identique à celle de la poutre globale. En effectuant une première étude sur les trois modèles de poutres globales testées expérimentalement, cela permet de mettre en avant la variation de ce coefficient en fonction des paramètres géométriques de la poutre.

¼ AS102 :

Pour le cas de la poutre AS012, l'étude eulérienne permet d'obtenir un coefficient de charge critique $K_{PG} = 26547$, ce qui équivaut à une charge critique $F_{CR} = 265,47$ kN. Ainsi, le travail consiste à chercher de manière incrémentale la valeur du coefficient de maintien rotationnel k_θ tel que la charge critique du quart d'ouverture soit égale à celle de la poutre globale, ce qui donne : $k_\theta = 1,3 \times 10^6$ N.mm/°.

¼ AS016 :

Pour le cas de la poutre AS016, l'étude eulérienne donne un coefficient de charge critique $K_{PG} = 32581$. Le mode propre fait intervenir forcément une forme d'instabilité bien qu'il avait été observé sur cette poutre non pas une d'instabilité mais la plastification des 4 coins de l'ouverture. Ainsi la rigidité des parois sinusoïdales est suffisamment grande pour permettre une plastification de l'ouverture. Par conséquent ce comportement se retrouve dans le calcul eulérien avec une charge critique d'instabilité relativement élevée par rapport à la précédente poutre : $F_{CR} = 325,81$ kN.

Pour obtenir une telle charge critique il faut appliquer un coefficient de maintien rotationnel $k_\theta = 5,05 \times 10^5$ N.mm/° au modèle de quart d'ouverture isolé.

¼ AS018 :

Pour le dernier modèle de poutre globale, le coefficient de charge critique calculé sur CAST3M est $K_{PG} = 34834$, équivalent à une charge critique $F_{CR} = 348,34$ kN. Afin de retrouver cette valeur de coefficient de charge critique, il a fallu appliquer à la ligne d'appui du quart d'ouverture un coefficient de semi-rigidité $k_\theta = 3,19 \times 10^6$ N.mm/°.

La valeur du coefficient de maintien rotationnel traduit bien le fait que cette dernière poutre est bien plus rigide que les trois précédentes, du fait d'un élancement de montant intermédiaire plus faible.

2.2.8. Bilan

Le comportement des modèles de quarts d'ouverture, avec leurs coefficients de maintien rotationnel, traduit de manière réaliste le comportement de chacune des trois poutres étudiées. Il est donc envisageable de lier ces valeurs de coefficient à la forme géométrique des poutres et notamment aux paramètres géométriques d'ouverture. Cependant, l'inconvénient d'une étude comme celle présentée précédemment est la comparaison d'un premier mode d'instabilité pour une

poutre globale avec un élément constitutif. Cela revient à comparer les résultats d'une analyse globale avec une analyse locale. Les écarts de résultats peuvent ainsi être mal interprétés.

En effet une forte approximation est faite au niveau des sollicitations pour effectuer le lien entre l'effort critique de la poutre globale et celui du quart d'ouverture, car nous considérons que l'ouverture fonctionne exactement comme une poutre échelle. Mais l'erreur inhérente à cette approximation peut varier suivant la forme de l'ouverture. De plus, le rapport entre les efforts N et V au sein des parties d'une ouverture varie en fonction de la taille de l'ouverture. Il va de soi que la rigidité de la paroi sinusoïdale peut varier en fonction du type de sollicitation. Ainsi, faire varier les paramètres d'ouverture revient à faire varier le système de chargement. Une étude paramétrique visant à calibrer un coefficient de maintien rotationnel élastique ne peut donc pas être basée sur la comparaison du modèle de quart d'ouverture isolé et d'un modèle de poutre globale.

Afin d'effectuer une étude comparative représentative de la réalité, il a été choisi de fonder cette étude sur un modèle facile à tester expérimentalement. Il s'agit du modèle de montant isolé, prélevé sur les poutres préalablement testées (voir **Figure II-65**). Ces échantillons permettent de tester le quart d'ouverture en maîtrisant mieux les conditions aux limites et de chargement. Le détail de l'étude eulérienne menée sur CAST3M est donné dans la troisième partie.

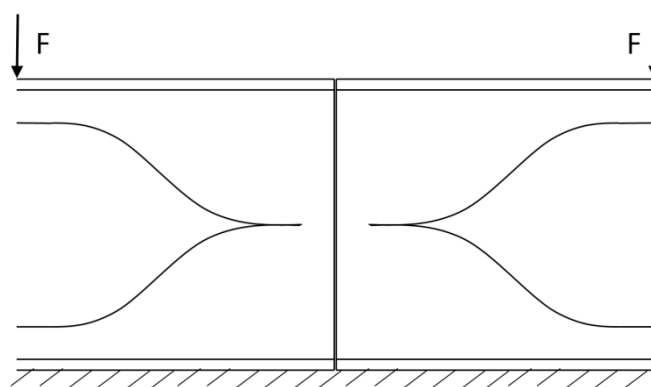


Figure II-65 Illustration du modèle de montant isolé (voir **Annexe A**)

A noter que la présence d'un raidisseur transversal aux points de chargement est un paramètre important. Il doit être pris en compte, que ce soit pour les calculs ou les essais. Son impact sur la rigidité du quart d'ouverture est étudié en détail.

3. CONCLUSION

Dans cette partie, nous avons tout d'abord présenté les études expérimentales effectuées sur trois poutres cellulaires à grande échelle avec ouvertures sinusoïdales. Ces études avaient pour objectif d'améliorer la compréhension du comportement de ce type d'ouverture. Les essais ont été effectués sur trois configurations d'ouverture, visant à représenter au mieux les gammes d'ouverture

possibles en fabrication. Les observations ont montré que la forme de l'ouverture influe sur le mode de ruine exclusivement lié à la flexion Vierendeel.

Les mesures faites des déplacements et des déformations ont permis d'identifier l'existence d'un mécanisme de ruine de l'ouverture la plus sollicitée, avec plastification ou voilement local des différentes parties constituant l'ouverture. En effet, les ouvertures de grandes tailles ont un mode de ruine similaire aux ouvertures rectangulaires, avec la formation de quatre rotules plastiques aux 4 coins de l'ouverture. En revanche, les ouvertures de moyennes et petites tailles ont une ruine qui implique le voilement local des parois de l'ouverture dont l'âme en bord libre est comprimée.

La comparaison des résultats numériques avec les résultats expérimentaux a permis de valider le modèle éléments finis développé sur SAFIR. De plus, l'analyse détaillée des résultats numériques a permis de confirmer les observations expérimentales. Nous avons poursuivi deux objectifs : tout d'abord, mieux comprendre le fonctionnement et la résistance de chaque partie de l'ouverture, puis étudier plus en détail le mécanisme de ruine d'une ouverture pour mieux définir l'état ultime d'une ouverture sinusoïdale. Nous avons pu ainsi confirmer que dans le cas de grande ouverture, la ruine correspond à la formation de 4 rotules plastiques. Puis, pour les ouvertures de petite et moyenne tailles, la ruine de l'ouverture combine le voilement local des quarts d'ouverture dont l'âme en bord libre est comprimée avec la plastification des autres.

Une seconde étude numérique plus exhaustive s'est concentrée sur l'étude du voilement local d'un quart d'ouverture soumis aux sollicitations déduites de la forme d'ouverture et du chargement. Cette étude a permis de mieux définir le voilement local de la paroi sinusoïdale. De plus, la comparaison entre le modèle de poutre globale et celui de quart d'ouverture isolé a permis de mettre en évidence que le calcul analytique donne une bonne estimation des sollicitations dans les différentes parties de l'ouverture. De plus, cette étude a révélé l'existence d'un maintien semi-rigide entre le quart d'ouverture et le montant d'âme entre deux ouvertures. Ce maintien explique l'allure de la déformée hors plan de la paroi sinusoïdale après voilement. Cette étude a ainsi permis de dégager une nouvelle piste de recherche.

Le travail s'est donc orienté sur la définition d'un nouveau modèle d'étude permettant de caractériser la semi-rigidité existant entre le montant intermédiaire et le quart d'ouverture, afin d'aider à mieux définir la résistance ultime des différentes sections le long d'un quart d'ouverture sinusoïdale.

Les premières approches numériques pour caractériser cette connexion ont montré qu'il était préférable d'utiliser un calcul en élasticité pure afin de s'affranchir de tout effet de plastification qui empêche de mettre en évidence l'influence d'une semi-rigidité. Cependant, les critères permettant de caractériser cette semi-rigidité restent approximatifs avec le modèle aux éléments finis du logiciel SAFIR. Il a donc été choisi de développer un modèle numérique sur le logiciel MEF CAST3M capable d'effectuer des calculs de modes propres d'instabilité. Ces calculs permettent de retrouver l'influence des paramètres géométriques sur la connexion semi-rigide entre le montant et le quart d'ouverture.

La troisième partie est axée sur le développement d'un nouveau modèle numérique qui utilise le calcul eulérien et la caractérisation du maintien semi-rigide, apporté par le montant d'âme, au travers d'une étude paramétrique. L'exploitation des résultats se fait par une approche dite des plans d'expériences pour caractériser le coefficient de semi-rigidité en fonction des différents paramètres géométriques d'ouverture.

PARTIE III - ETUDES DE MONTANTS ISOLES ET ANALYSE DE LA CONNEXION MONTANT/QUART D'OUVERTURE -

- 1- Introduction
- 2- Programme expérimental
- 3- Analyse des résultats expérimentaux et numériques
- 4- Bilan
- 5- Analyse de la connexion montant/quart d'ouverture
- 6- Etude par plans d'expérience
- 7- Conclusion

1. INTRODUCTION

En seconde partie, nous avons constaté que pour étudier la semi-rigidité de la liaison entre le montant intermédiaire et la paroi d'âme sinusoïdale de l'ouverture, il est préférable d'utiliser un système dans lequel les chargements sont maîtrisés analytiquement. Ainsi, un nouveau modèle géométrique de base, différent de celui de la poutre globale, est utilisé.

En effet, effectuer une étude paramétrique visant à caractériser l'influence des paramètres géométriques sur l'évolution de cette semi-rigidité doit exclure l'influence de la variation du système de chargement autour de l'ouverture. Or, dans un modèle comme celui de la poutre globale ou d'une ouverture complète, la variation des paramètres d'ouverture fait aussi varier le rapport entre les efforts axiaux et tranchants des différentes parties de l'ouverture. Par conséquent, nous avons choisi de développer un nouveau modèle, basé sur la géométrie initiale des poutres testées mais permettant l'étude des paramètres géométriques pour une sollicitation fixée. Le choix s'est porté sur une sollicitation de flexion simple qui permet d'observer les différents phénomènes associés à la ruine par voilement des parois d'ouverture sinusoïdale.

Cette troisième partie s'articule en deux axes principaux, tout d'abord nous présentons une nouvelle campagne d'essai sur un nouveau modèle géométrique du montant isolé. La seconde étape consiste à développer une formule empirique permettant de quantifier le maintien rotationnel apporté par le montant intermédiaire au quart d'ouverture.

Le premier objectif des essais est d'étudier le comportement local des quarts d'ouverture soumis à une flexion simple et de comparer les modes de ruine obtenus avec les résultats expérimentaux sur poutre globale. Cela permet de justifier de la bonne représentativité de ce modèle de montant isolé (voir **Annexe A** pour le rappel des terminologies).

Un programme expérimental est donc mené sur des échantillons prélevés dans les zones les moins sollicitées des poutres préalablement testées [**DUR, 12-1**]. Chaque échantillon est constitué de deux demi-ouvertures séparées par le montant d'âme intermédiaire. Cette configuration permet de conserver l'intégralité de la connexion entre l'ouverture sinusoïdale et le montant d'âme pour en étudier la semi-rigidité (**Figure III-4**). De plus, chaque essai est doublé avec ou non la présence d'un raidisseur transversal pouvant s'avérer déterminant sur le mode de ruine de l'échantillon. Les géométries correspondant aux trois poutres précédemment testées pourront être étudiées. Les résultats expérimentaux serviront de base à la validation du modèle numérique développé sur CAST3M. Ce dernier est ensuite utilisé pour une étude paramétrique visant au développement et à la calibration du modèle analytique pour prédire la résistance des différentes parois autour d'une ouverture sinusoïdale.

2. PROGRAMME EXPERIMENTAL

Le programme expérimental a permis de tester 10 quarts d'ouverture dont les paramètres d'ouverture sont détaillés dans le **Tableau III-1** et la **Figure III-3**. Chaque échantillon est caractérisé par la largeur du montant (w), la longueur de partie sinusoïdale (l_s) et la partie droite de l'ouverture ($w/2$), voir **Figure III-3**. Les travaux autour de ces essais se résument à l'observation des modes de ruine des quarts d'ouverture chargés en flexion et cisaillement, à l'analyse des courbes force-déplacement et en particulier l'effort ultime. Les paramètres qui varient entre les différents essais sont les paramètres d'ouverture, de géométrie de profilé initial et la présence ou non de raidisseurs transversaux et sinusoïdaux.

Certains quarts d'ouverture testés ont les mêmes configurations géométriques car un échantillon permet d'effectuer deux tests consécutifs. Le fait de retourner l'échantillon après le premier test pour charger les deux autres quarts d'ouverture de même configuration permet d'étudier la reproductibilité des résultats notamment pour les cas de ruine par instabilité locale. Pour certains échantillons, des raidisseurs sont disposés sur les montants intermédiaires et de part et d'autre de l'âme d'un des quarts d'ouverture comme présenté à la **Figure III-3**. Ainsi ces essais donnent la possibilité d'observer l'influence des paramètres géométriques, de la présence d'un raidisseur transversal et de la présence d'un raidisseur sinusoïdal.

Pour simplifier les essais, le chargement est appliqué simultanément sur deux quarts d'ouverture opposés. La force appliquée engendre le cisaillement du quart d'ouverture et par conséquent une forme de flexion Vierendeel dans la partie sinusoïdale de la demi-ouverture. Cette configuration est donc idéale pour évaluer la rigidité de la paroi en fonction des seuls paramètres géométriques (voir **Figure III-1**).

2.1. Montage des essais sur montant isolé

Des maintiens latéraux sont disposés le long de l'éprouvette pour éviter les risques de déversement. Les charges sont appliquées symétriquement par l'intermédiaire d'un chevrete rigide. Le chargement s'effectue à l'aide d'un vérin contrôlé en déplacement. Les mesures sont prises grâce à des capteurs de déplacement sur les points de chargement afin d'en extraire les courbes force-déplacement. L'effort ultime est associé à l'effort maximal mesuré durant l'essai précédent l'instabilité de l'âme ou la formation d'une rotule plastique. Les instabilités peuvent être observées au travers de capteurs horizontaux disposés sur la paroi sinusoïdale.

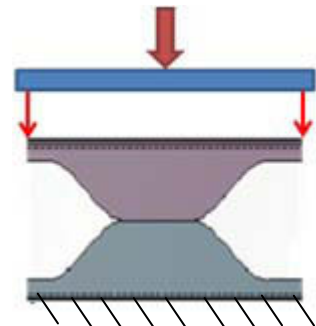
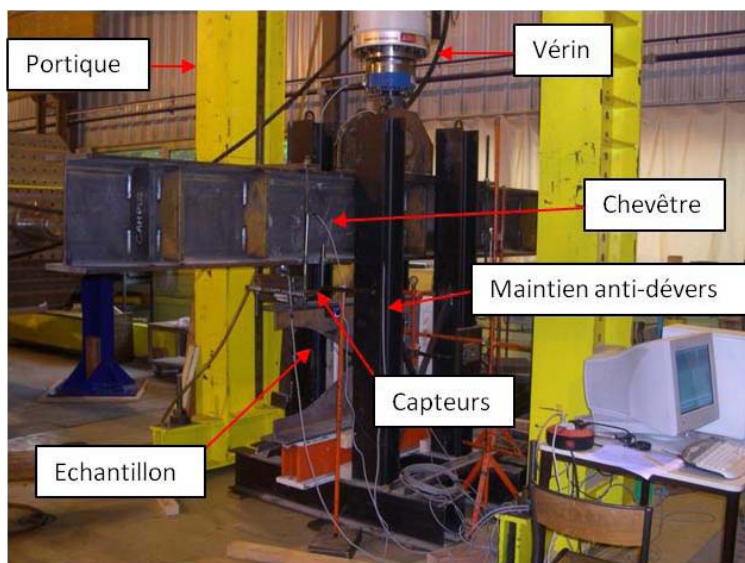


Figure III-1 Montage des essais

2.2. Détails des montants isolés testés

Les caractéristiques géométriques des différentes configurations testées sont détaillées dans le **Tableau III-1**. Les trois configurations géométriques d'éprouvettes, correspondant aux trois poutres préalablement testées sont nommées A, B et C. La **Figure III-2** montre les deux types d'éprouvettes (échantillons) prélevés à partir des poutres : avec raidisseur sur le montant (S) et sans raidisseur (O). Parmi les éprouvettes munies d'un raidisseur transversal, un des quarts d'ouverture est raidi sur sa partie sinusoïdale grâce à un raidisseur sinusoïdal (voir **Figure III-3**). Au final, 10 différents quarts d'ouverture sont testés.

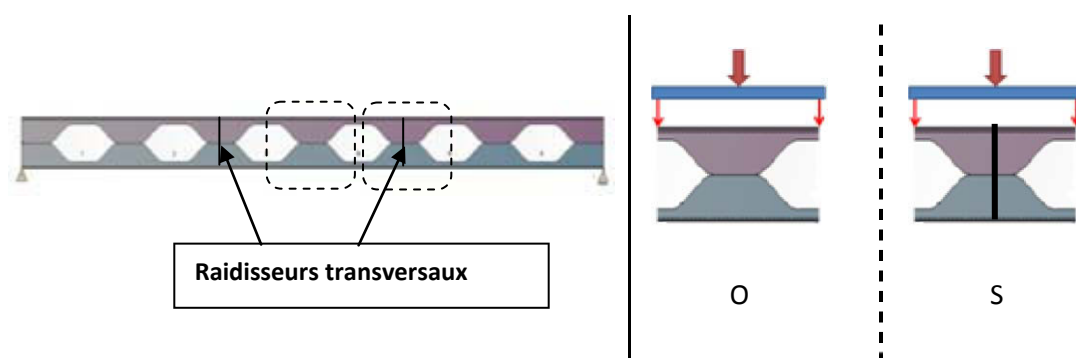


Figure III-2 Modèles des échantillons prélevés sur les poutres AngelinaTM originales

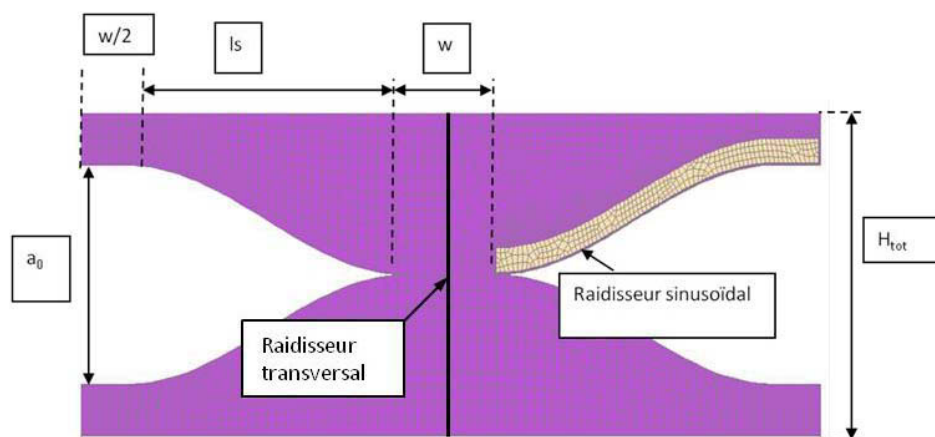


Figure III-3 Propriétés géométriques d'un échantillon de montant isolé muni d'un raidisseur transversal et sinusoïdal

Echantillon type	A	B	C
Limite élastique (MPa)	460	460	325
Profilé originel	IPE 450	IPE 450	IPE 400
H_{tot} : Hauteur totale (mm)	675	735	507,5
a_0 : hauteur d'ouverture (mm)	450	570	215
l_s : longueur de sinusoïde (mm)	638	420	325
w : largeur de montant (mm)	205	350	202

Tableau III-1 Caractéristiques géométriques des trois configurations testées

Les échantillons identiques deux à deux seront nommés en plus des lettres A, B, C, par le chiffre 1 ou 2. Ensuite, la dénomination supplémentaire S (raidisseur) vise à caractériser les échantillons munis de raidisseurs. Par exemple :

- échantillons A-S-2 : deuxième essai de configuration A muni d'un raidisseur
- échantillon A-1 : premier essai de configuration A sans raidisseur.

2.3. Modèle éléments finis

Un modèle éléments finis a été développé pour analyser le comportement des échantillons testés à l'aide du logiciel CAST3M. Le modèle utilise des éléments coques (Coq4) qui permettent de considérer les non-linéarités géométriques et matérielles. Cet élément est particulièrement efficace pour représenter les phénomènes d'instabilités locales avec un minimum de ressources. Le modèle est validé sur la base de résultats expérimentaux en comparant d'une part, les efforts ultimes et d'autre part, les courbes force-déplacements. Les échantillons sont considérés comme simplement appuyés sur la semelle inférieure et maintenus latéralement au niveau des points de chargement.

Le calcul numérique est effectué à l'aide d'un calcul non linéaire en grand déplacement. La loi Elastique-Plastique avec écrouissage linéaire, comme illustré à la **Figure II-5**, est choisie pour représenter les matériaux avec une limite élastique prise à partir des mesures d'éprouvettes de

traction (voir **Tableau II-4**). Le calcul comprend deux étapes. La première correspond à un calcul de modes propres d'instabilité de la structure. Le premier mode est automatiquement inséré comme imperfection initiale de la structure. Ensuite le calcul non-linéaire en grands déplacements est effectué sur la nouvelle géométrie de l'échantillon. Il résulte de ce calcul l'allure de la déformée ultime ainsi que la courbe force-déplacement. La partie descendante de la courbe force-déplacement correspond à la phase post-ultime de l'essai.

Ce modèle numérique est utilisé, après validation, pour une étude paramétrique de diverses configurations géométriques d'ouvertures dans le but de développer un nouveau modèle analytique permettant de vérifier de manière plus réaliste la résistance locale d'un quart d'ouverture.

3. ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX ET NUMERIQUES

Les résultats expérimentaux et numériques sont comparés sur la base des courbes force-déplacement ainsi que sur les modes de ruine observés. Comme chaque essai mobilise deux quarts d'ouverture simultanément, la ruine apparaît seulement sur un seul des deux quarts durant les essais, l'autre quart d'ouverture ne peut donc pas être exploité.

Comme indiqué précédemment, les modes de ruine observés sur les poutres globales sont soit la plastification de l'ouverture, soit le voilement local de la partie sinusoïdale autour de l'ouverture. Ces deux modes de ruines se retrouvent dans les modèles de montants isolés correspondant. Les résultats sont résumés dans la partie suivante puis présentés sous forme plus détaillée par catégorie avec et sans raidisseur transversal.

3.1. Résumé des résultats

Le **Tableau III-2** résume les efforts ultimes mesurés expérimentalement et obtenus avec le logiciel CAST3M. La charge ultime est considérée comme la valeur maximale de l'effort repris par l'échantillon avant la formation de la rotule plastique ou l'instabilité de la paroi sinusoïdale caractérisée par la partie descendante de la courbe force-déplacement. La valeur de l'effort ultime calculé analytiquement ($F_{ult,ana}$) est donnée à titre indicatif ; ce calcul se base essentiellement sur une classification verticale des sections le long du quart d'ouverture. Enfin, le tableau permet de comparer les valeurs, mesurées expérimentalement, de la position des sections critiques ($X_{cr,test}$) avec celles obtenues numériquement ($X_{cr,MEF}$).

Echantillon	$F_{ult, Test}$ (kN)	$X_{cr, Test}$ (mm)	$X_{cr, FEM}$ (mm)	$F_{ult, MEF}$ (kN)	$F_{ult, anal.}$ (kN)	Ecart (MEF/Test)
A-O-1	290,4	380	367	310	114	1,07
A-O-2	306	380	367	310	114	1.01
A-S-1	306,4	330	345	318	114	1.04
A-S-2	343,3	330	345	318	114	0.93
B-O-1	211,8	240	230	195	146	0,92
B-O-2	191,9	240	230	195	146	1.02
C-O-1	393,5	250	236	402	130	1,02
C-O-2	420			402	130	0.96
C-S	418,4	245	235	404	130	0,97

Tableau III-2 Résumé des résultats numériques et expérimentaux des échantillons testés

Les comparaisons des différents résultats expérimentaux avec les résultats numériques montrent une bonne concordance du modèle numérique avec les essais. De plus, nous avons globalement observé que les modes de ruine (détaillés dans les parties suivantes) de la majorité des échantillons sont proches de ceux constatés sur les poutres globales lors des essais à grande échelle.

Par contre, nous avons noté que le modèle analytique sous-estime beaucoup la résistance des quarts d'ouverture. La simple classification verticale des sections est évidemment trop conservatrice et mène à une forte réduction de la résistance plastique des sections le long du quart d'ouverture. Cet écart important naît principalement du fait que le calcul de la résistance des sections en Té des quarts d'ouverture ne considère pas de manière réaliste les conditions aux limites des sections en Té le long du quart d'ouverture. En effet, la présence du montant d'âme adjacent au quart d'ouverture est un élément qui rigidifie la paroi sinusoïdale ou du moins, les sections proches du montant et qui sont les plus élancées (voir **Figure III-4**).

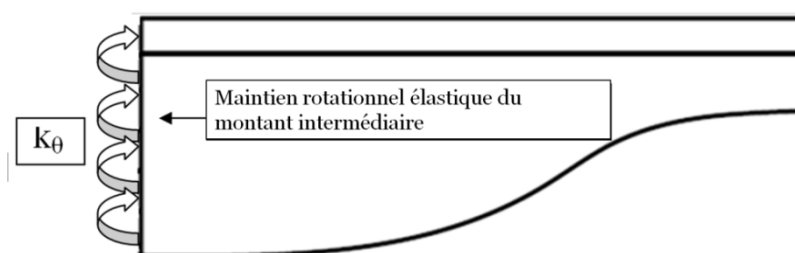


Figure III-4 Modèle d'un quart d'ouverture avec un maintien rotationnel élastique k_θ

3.2. Montants isolés sans raidisseurs transversaux

Les courbes force-déplacement pour les échantillons A sans raidisseur permettent d'identifier leur effort ultime (**Figure III-5**). Ce type d'évolution caractérise l'existence d'une instabilité. La figure ci-dessous montre la comparaison de la courbe obtenue expérimentalement avec celle déduite du calcul MEF. Nous pouvons observer que le modèle MEF décrit de manière assez réaliste le comportement des éprouvettes ainsi que l'effort ultime.

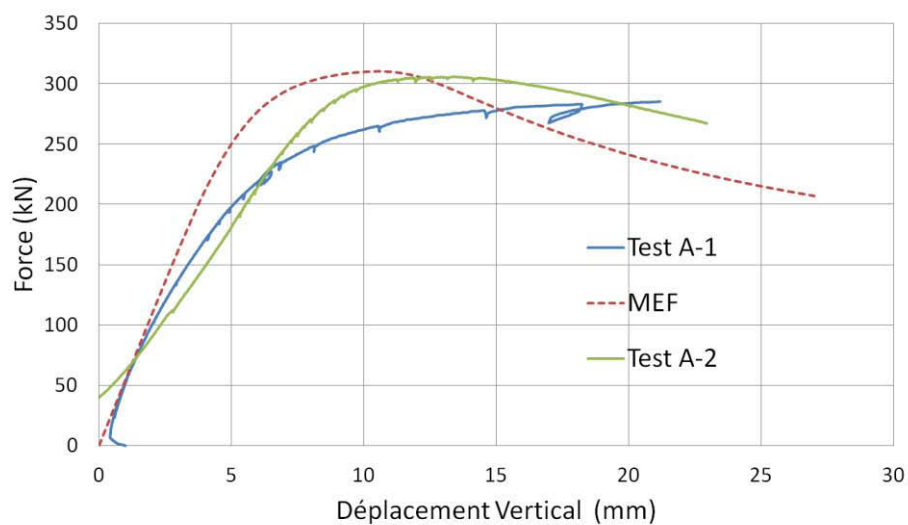


Figure III-5 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les échantillons A

De plus, nous pouvons observer, pour les essais des échantillons A, une déformée relativement proche de celle obtenue avec le modèle MEF (voir **Figure III-6**). Ainsi, ces premières comparaisons indiquent que le modèle éléments finis représente de manière réaliste le comportement de cette configuration d'échantillon. En effet, sur le **Tableau III-2** nous notons que les positions des sections critiques entre les essais et le calcul MEF sont similaires.

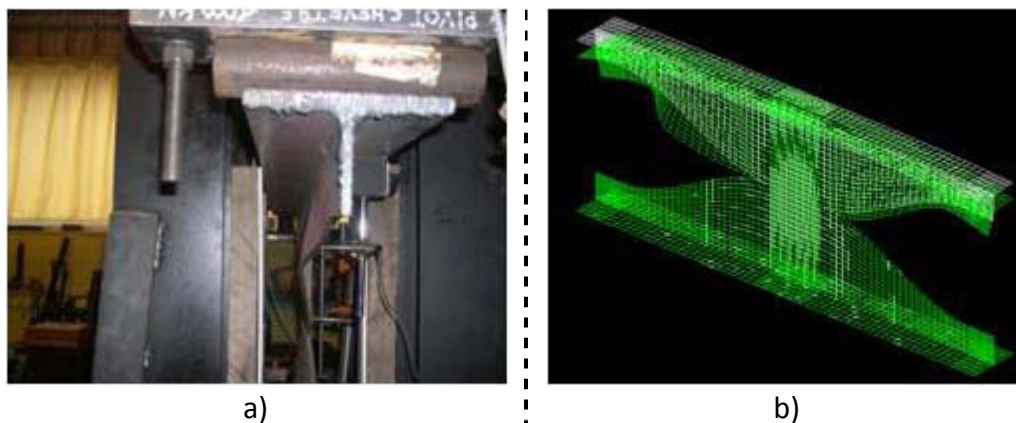


Figure III-6 Comparaison des déformées ultimes pour l'essai A (a) et la modélisation (b)

Pour la configuration géométrique B, nous observons que le mode de ruine est différent de celui constaté pour la configuration A. En effet, il correspond à une plastification de la partie droite de l'ouverture (voir **Figure III-7**). Ce mode de ruine est concordant avec celui observé sur la poutre parente précédemment testée (AS016), la taille importante de l'ouverture implique des sections en té au droit de l'ouverture plus réduite, d'où une résistance plastique plus faible.

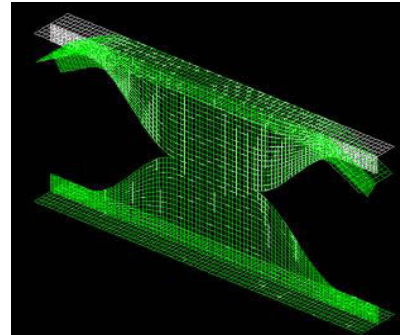


Figure III-7 Comparaison entre les déformées ultimes obtenues expérimentalement et numériquement (échantillon B)

La **Figure III-8** montre les courbes de force-déplacement correspondant à un mode ruine de plastification. La comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux montre clairement la bonne représentativité du modèle numérique.

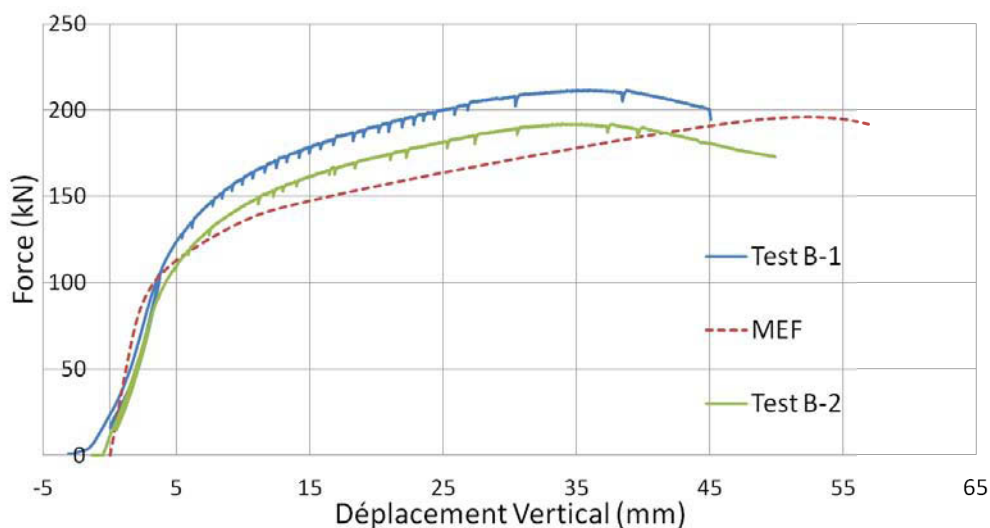


Figure III-8 Comparaison des courbes forces-déplacement expérimentales et numériques (échantillon B)

L'observation expérimentale montre que le mode de ruine des échantillons C-1 et C-2 est une combinaison d'une instabilité locale de la sinusoïde avec une instabilité globale par flambement du montant de l'échantillon (**Figure III-11**). Cette remarque est confirmée par les résultats numériques pour lesquels nous pouvons clairement identifier cette interaction de mode de ruine sur la déformée modale ainsi que sur la déformée ultime (**Figure III-9**).

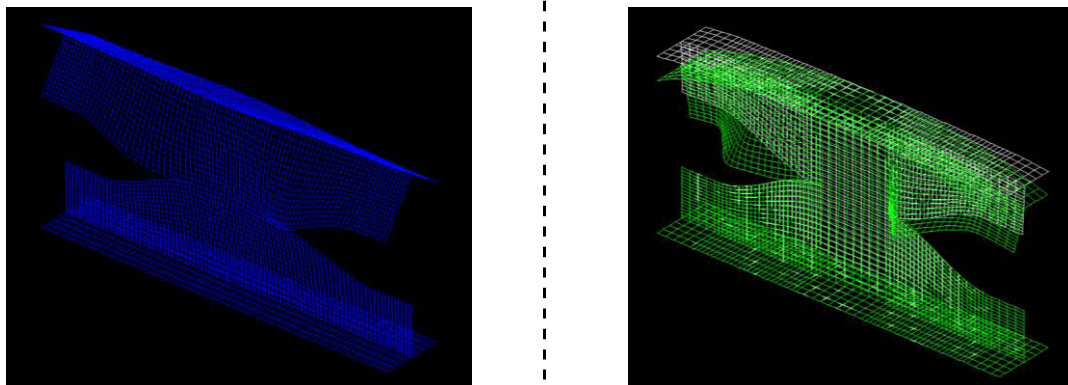


Figure III-9 Déformée modale (gauche) et déformée ultime (droite) de l'échantillon C-1

Les courbes force-déplacement (**Figure III-10**) indiquent un comportement caractéristique d'une instabilité. En effet, une fois l'effort ultime atteint, la courbe chute brutalement. La comparaison des courbes expérimentales et numérique montre une bonne représentativité du modèle MEF.

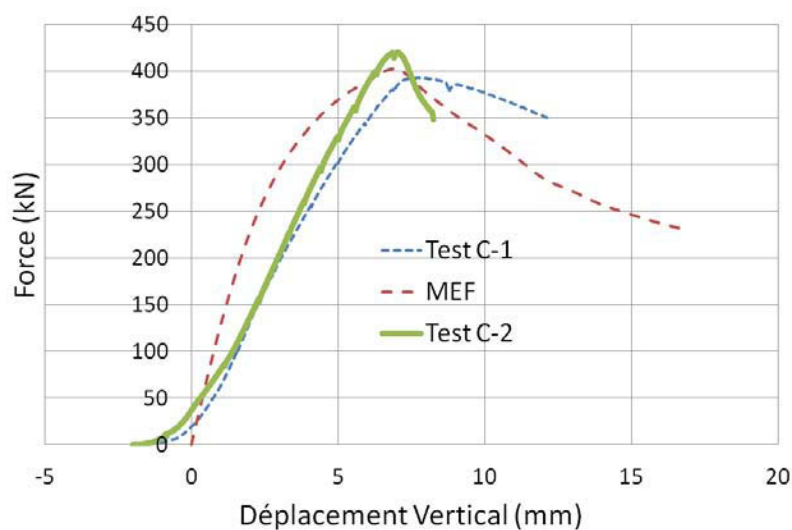


Figure III-10 Comparaison des courbes force-déplacement expérimentales et numérique (échantillon C)

Le flambement global a clairement pu être observé sur l'échantillon C-2 (**Figure III-11**). Ce type de ruine n'a pas influencé la valeur de l'effort ultime en comparaison avec l'échantillon C-1 pour lequel l'instabilité globale était moins évidente. La cause principale du flambement naît de la configuration du chargement qui revient à comprimer le montant intermédiaire. Cette configuration n'est pas typique au niveau d'une poutre cellulaire ; ainsi ce mode de ruine n'est pas représentatif du comportement local autour d'une ouverture. Ce phénomène de flambement global sera évité lors des essais suivants, grâce à la présence de raidisseurs transversaux (C-S).



Figure III-11 Ruine de l'échantillon C-2 avec flambement global de l'échantillon

3.3. Montants isolés avec raidisseurs

Les échantillons avec raidisseurs sur le montant permettent d'éviter les instabilités globales de l'échantillon. La configuration B a montré une ruine par plastification à la jonction entre les parties droite et sinusoïdale de l'ouverture. Cette ruine n'est donc pas influencée par la présence de raidisseurs transversaux. Par conséquent seuls les échantillons correspondant aux configurations A et C seront testés.

Il peut être noté que les modes de ruine des échantillons A-S-1 et A-S-2 sont relativement proches de ceux observés sur les échantillons sans raidisseurs avec une ruine locale dans la sinusoïde. Cependant, à l'inverse des échantillons A sans raidisseurs, les deux ondes de voilement des deux quarts d'ouverture testés se font de manière antisymétrique (comparer les déformées ultimes des **Figure III-6** et **Figure III-15**). La forme de la déformée ultime de la **Figure III-15** dénote un point fixe net entre les deux parties sinusoïdales (le montant raidi transversalement), ce qui n'était pas le cas pour les échantillons A sans raidisseurs.

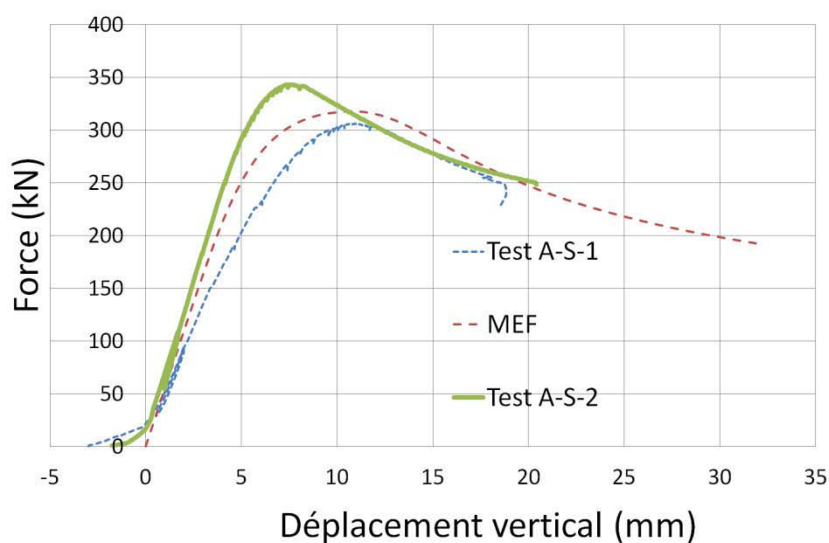


Figure III-12 Comparaison des courbes force-déplacement expérimentales et numériques (échantillons A-S-1 et A-S-2)

De plus, pour l'échantillon A-S-2, un des deux quarts d'ouverture est renforcé par un raidisseur sinusoïdal de part et d'autre de l'âme. De ce fait, l'instabilité locale ne s'est produite que d'un côté de l'échantillon alors que le côté renforcé reste dans le domaine élastique. La **Figure III-13** donne la courbe force-déplacement du côté du quart d'ouverture raidi ; elle montre clairement un comportement élastique du quart d'ouverture. Ces raidisseurs ont été seulement disposés par soudure par points et nous pouvons noter que ce système suffit largement à renforcer localement la résistance de la sinusoïde. Les observations sont les mêmes pour le quart d'ouverture correspondant du modèle de montant isolé C-S.

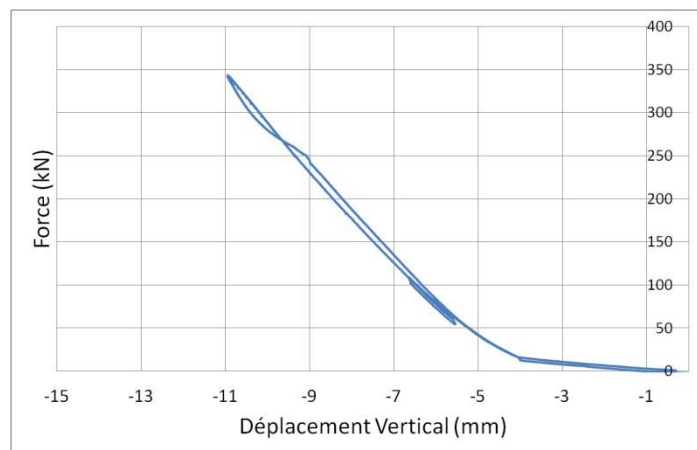


Figure III-13 Courbe force-déplacement vertical expérimentale du quart d'ouverture avec raidisseur sinusoïdal (A-S-2)

Grâce à la présence des raidisseurs transversaux, l'instabilité par flambement global de l'échantillon est évitée. Ainsi pour l'échantillon C-S, le mode de ruine est l'instabilité locale dans la paroi sinusoïdale des quarts d'ouverture. Sur la **Figure III-14**, on compare les courbes numériques et expérimentales. Nous pouvons constater que le modèle numérique représente bien le comportement obtenu expérimentalement, notamment l'instabilité locale dans la sinusoïde.

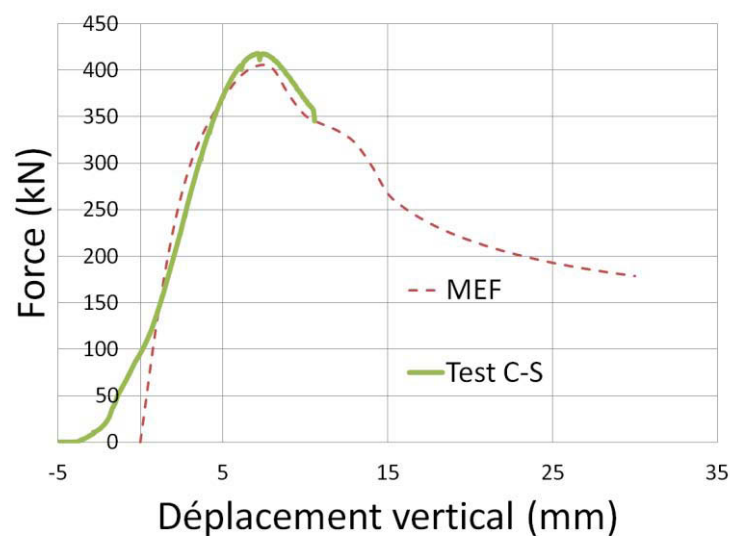


Figure III-14 Comparaison des courbes force-déplacement vertical expérimentales et numériques (C-S)

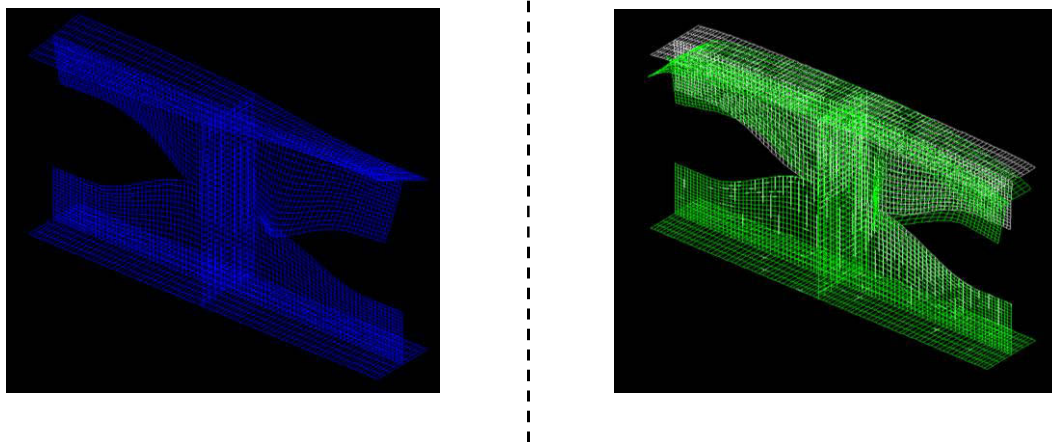


Figure III-15 Déformée du premier mode de voilement (gauche) et déformée ultime (droite) de l'échantillon C-S

3.4. Analyse des résultats

Les résultats expérimentaux ont montré une similarité entre les modes de ruine des échantillons et ceux de la poutre globale. Nous avons observé que l'existence d'un raidisseur transversal au niveau du montant intermédiaire ne change que peu la valeur de l'effort ultime. Par contre il permet d'éviter toute forme d'interaction entre les ruines locale et globale du modèle de montant isolé. En revanche l'effort critique modal, qui est fonction de la rigidité du système, est relativement influencé par l'existence d'un mode d'instabilité, global ou non. Ainsi, le raidisseur transversal a une influence non négligeable sur la rigidité du système et sur la représentativité du mode de ruine.

En effet pour les échantillons A-1, A-2, C-1 et C-2 la ruine s'apparente à une combinaison d'instabilités globale et locale. Cette combinaison de ruine s'identifie principalement au travers de

l'observation des ondes de voilement. Sur chacun de ces tests, nous avons constaté que l'instabilité locale des deux quarts d'ouverture s'effectue dans la même direction. L'observation de deux ondes de voilement dans la même direction avec un faible déplacement hors plan global du montant intermédiaire (clairement identifié sur les modélisations) rappelle le comportement d'une plaque constituée d'un raidisseur semi-rigide décrit par le schéma du milieu de la **Figure III-16**.

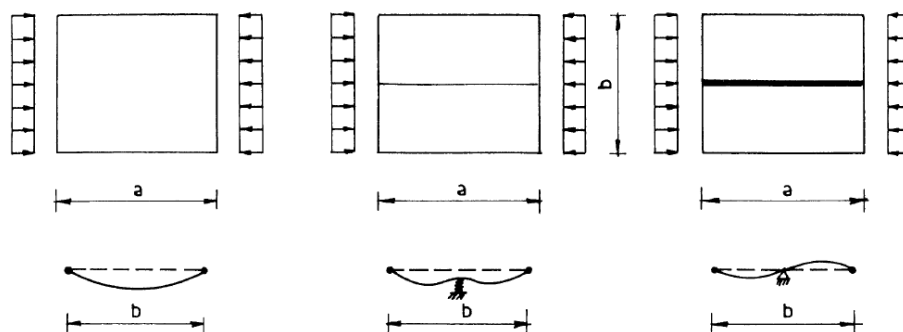


Figure III-16 Illustration du comportement d'un raidisseur rigide et d'un raidisseur souple [MAN, 94]

Dans le cas d'un raidisseur avec une raideur torsionnelle insuffisante, le raidisseur tourne avec la plaque. Il ne fournit pas un appui rigide qui permet de séparer totalement l'onde de voilement de la plaque en deux ondes de voilement antisymétriques. Par conséquent, le comportement observé sur ces échantillons sans raidisseur transversal montre que le modèle d'échantillon sans raidisseur a un montant intermédiaire insuffisamment rigide. Dans ces cas, le montant intermédiaire ne permet pas d'avoir une ruine locale du quart d'ouverture sans interaction avec le second quart d'ouverture. L'hypothèse ainsi émise analytiquement, où l'on considère une ligne d'appui hors plan au niveau de la jonction de la sinusoïde et du montant ne peut pas s'appliquer.

Enfin, ce comportement est propre au modèle de montant isolé, car les déplacements hors plan du montant sont nuls dans un modèle de poutre globale. Pour améliorer la bonne représentativité du modèle de montant isolé il est nécessaire d'appliquer un raidisseur transversal au niveau du montant intermédiaire.

4. BILAN

Le modèle numérique développé sur CAST3M représente de manière précise le comportement local observé sur les échantillons de montants isolés avec et sans raidisseur transversal et peut ainsi être validé. Ce modèle peut donc être utilisé pour une étude paramétrique de cette ruine locale.

Les différents types de montants isolés testés ont montré deux principaux modes de ruine : la plastification des sections de la partie droite de l'ouverture et l'instabilité locale dans la partie sinusoïdale. La plastification de l'ouverture, et donc du quart, est directement liée à la taille d'ouverture. Ainsi la plastification s'obtient pour des cas de grandes ouvertures qui impliquent des hauteurs relativement faibles au niveau des sections en T de la partie droite de l'ouverture. Pour les

autres configurations d'ouverture nous avons toujours observé une ruine par instabilité dans la sinusoïde comme pour les modèles de poutre globale.

Enfin, les observations expérimentales et numériques ont permis de mettre en évidence le fait que les échantillons de montants isolés, sans raidisseurs transversaux, étaient moins représentatifs de la réalité du comportement des quarts d'ouverture en situation de poutre globale. En effet il existe sur ces modèles une interaction entre les instabilités locale et globale de l'échantillon. Cette interaction peut perturber l'interprétation des résultats, en termes de rigidité et de modes propres d'instabilité des parois.

Dans le but de caractériser uniquement l'instabilité de la paroi sinusoïdale, il est nécessaire de se prémunir contre les autres formes d'instabilité. La présence de raidisseurs transversaux a montré son utilité en permettant d'éviter toute forme d'instabilité globale des montants isolés.

Cette étude a permis de valider le modèle MEF et la capacité du modèle d'échantillon (appelé modèle de montant isolé), avec raidisseur transversal, à représenter l'instabilité locale précédemment observée sur la poutre globale. Une étude paramétrique peut donc être menée sur ce modèle simplifié afin de déterminer la rigidité apportée par le montant intermédiaire sur la paroi sinusoïdale, au travers de calculs eulériens effectués sur le modèle MEF de CAST3M.

Il s'agit alors d'effectuer une étude paramétrique afin de développer une loi polynomiale qui permet, en fonction des seuls paramètres géométriques d'ouverture (a_0 , l_s et w), de quantifier la semi-rigidité de la connexion entre le montant d'âme et la paroi d'ouverture sinusoïdale. Pour ce faire, le travail est orienté sur les plans d'expériences et particulièrement les méthodes qui permettent d'exploiter les résultats d'études paramétriques au travers de régressions multilinéaires et de la méthode des moindres carrés. Cette caractérisation de rigidité sera utilisée pour permettre d'améliorer le modèle analytique en considérant au mieux les conditions aux limites des sections et d'en déduire leurs résistances de manière réaliste.

5. ANALYSE DE LA LIAISON MONTANT/QUART D'OUVERTURE

Le montant d'âme garantit un certain maintien élastique de la paroi du quart d'ouverture. Nous avons choisi de réaliser une étude paramétrique de la valeur du coefficient de maintien élastique k_θ en comparant les modèles numériques du quart d'ouverture et du montant isolé (voir **Figure III-4**). Cette étude est basée sur l'analyse des modes propres de voilement élastique. Cela permet de s'affranchir de toute influence de la limite élastique et de la redistribution d'efforts liée à la plastification des éléments les plus sollicités.

Pour établir une étude paramétrique, il s'agit dans un premier temps, de définir les principaux paramètres influents : la hauteur de poutre H_{tot} , la longueur de sinusoïde l_s , la largeur de montant w et la hauteur d'ouverture a_0 . Il est souvent utile de faire ce genre d'étude en se basant sur des

paramètres adimensionnels. Par exemple, un rapport intéressant qui permet de caractériser la largeur de montant par rapport à la longueur d'ouverture est le rapport w/L_0 avec L_0 , la longueur d'une ouverture. De même, le rapport a_0/H_{tot} permet de rendre compte de la proportion d'âme restante sur la hauteur H_{tot} d'une poutre munie d'une ouverture de hauteur a_0 , qui permet de définir de manière algébrique la notion de grande ou petite ouverture.

Avec L_0 : longueur d'ouverture = $2 \times l_s + w$

Si l'étude se concentre sur le modèle de montant isolé, les premières analyses paramétriques peuvent être basées sur les facteurs ci-dessous décrits sur la **Figure III-17** :

- l_s
- a_0/H_{tot}
- w/L_0
- Profilé initial

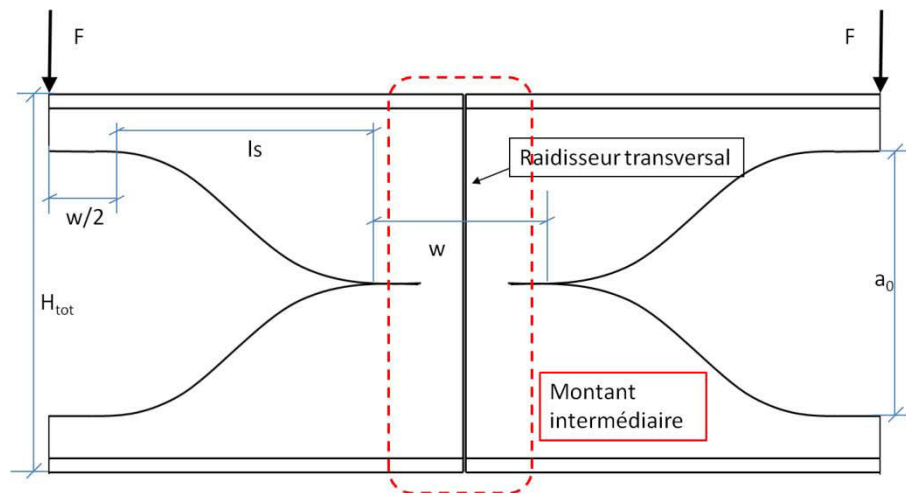


Figure III-17 Modèle géométrique d'échantillon et rappel des différents termes utilisés

Exemple : étude de l'influence de la longueur de sinusoïde (l_s)

Afin d'analyser l'influence d'un paramètre, nous avons choisi d'étudier chaque paramètre de manière séparée. Le profilé originel est un IPE450, les tests sont basés sur le cas de référence de la poutre testée AS012 considérée comme configuration d'ouverture standard.

- Profilé : IPE450
- $l_s = 638\text{mm}$
- $a_0 = 450\text{mm}$
- $w = 205\text{mm}$
- $H_{tot} = 675\text{mm}$
- $L_0 = w + 2 \times l_s = 1481\text{mm}$
- $w/L_0 = 0,13\text{mm}$

Le **Tableau III-3** présente les résultats de la première étude visant à donner une tendance de l'influence de la longueur de sinusoïde sur la valeur du coefficient de maintien rotationnel élastique k_θ .

Cette valeur de coefficient de maintien rotationnel élastique est recherchée de manière incrémentale pour chaque cas. Tout d'abord, un premier calcul de mode propre d'instabilité est effectué sur le modèle de montant isolé. Ce premier calcul permet de ressortir la valeur du coefficient de charge critique (K_{cr1}) correspondant au premier mode d'instabilité du montant isolé. L'intérêt est donc d'avoir un montant isolé dont le premier mode d'instabilité correspond avec l'instabilité locale du quart d'ouverture sans instabilité globale ; d'où l'utilité d'utiliser d'un modèle muni d'un raidisseur transversal (à gauche de la **Figure III-19**). Ce coefficient de charge critique est ensuite utilisé comme valeur de référence définissant ainsi la charge critique du quart d'ouverture constituant l'échantillon.

Ensuite, un second calcul est mené sur le modèle de quart d'ouverture seul, lequel est sollicité par un effort tranchant identique au modèle de montant isolé (voir **Figure III-18**). Ce modèle de quart d'ouverture est constitué d'une ligne d'appui avec un maintien rotationnel k_θ . Il s'agit ensuite de faire varier manuellement la valeur de ce coefficient k_θ de telle sorte que le coefficient de charge critique du modèle de quart d'ouverture (K_{cr2}) soit égal au coefficient de charge critique du modèle de montant isolé (K_{cr1}). Un exemple de premier mode d'instabilité pour le modèle de montant isolé muni de raidisseur transversal et de premier mode d'instabilité du modèle de quart d'ouverture est donné **Figure III-19**.

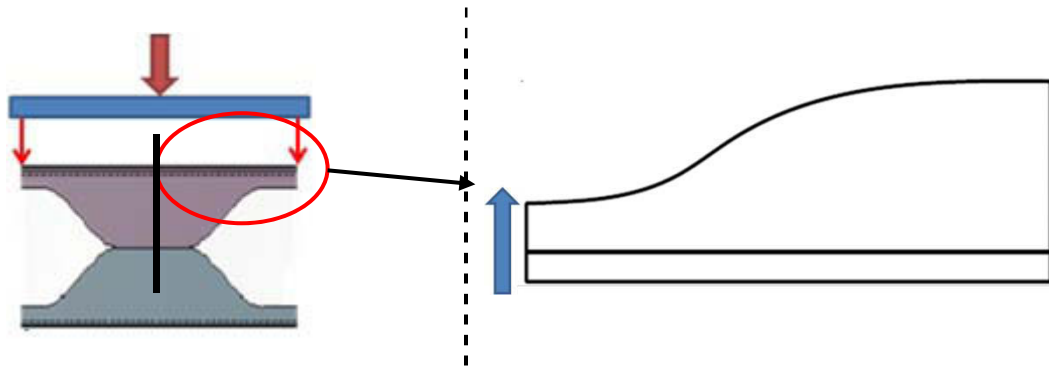


Figure III-18 Illustration du système de chargement des deux modèles, montant isolé (gauche) et quart d'ouverture seul (droite)

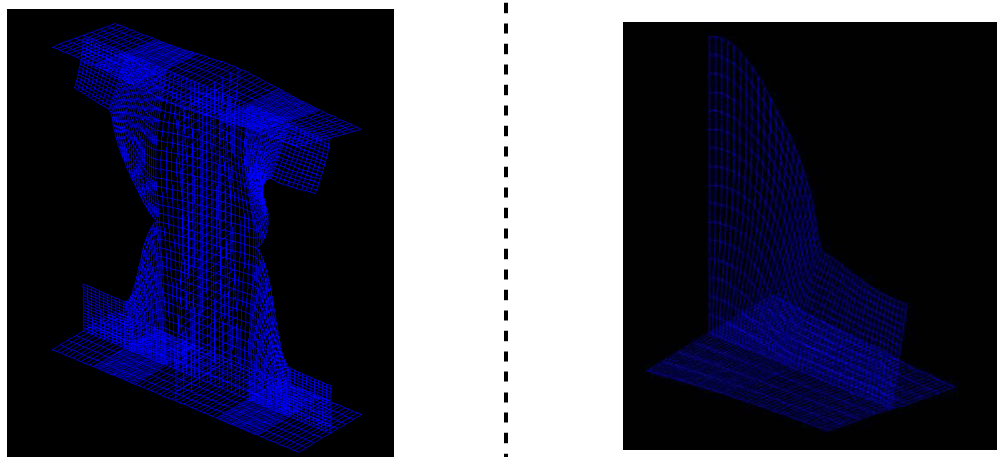


Figure III-19 Illustration du premier mode d'instabilité du modèle de montant isolé (gauche) et du modèle de quart d'ouverture (droite)

Le **Tableau III-3** donne les résultats de cette première étude paramétrique. Il donne la valeur du coefficient k_θ à imposer au modèle de quart d'ouverture pour obtenir un coefficient de charge critique (K_{cr2}) égal à celui du modèle de montant isolé correspondant (K_{cr1}).

Test n°	Is	a0	w	L ₀	w/L ₀	K _{cr1}	$k_\theta \times 10^6$	K _{cr2}
1	900	450	205	1905	0,1	1047,0	2,39	1046,9
2	750	450	205	1705	0,12	1269,6	2,35	1269,6
3	638	450	205	1481	0,14	1495,4	2,25	1495,4
4	410	450	205	1025	0,2	2245,6	1,72	2245,6
5	240	450	205	685	0,3	3299,7	0,847	3299,8
6	105	450	205	415	0,49	4966,9	0	5009

Tableau III-3 Résultats de l'étude de l'influence de la longueur de sinussoïde

Il peut être observé sur le **Tableau III-3** que le test n°6 pose le problème d'avoir un coefficient critique du modèle de quart d'ouverture (K_{cr2}) supérieur à celui obtenu avec le modèle de montant isolé K_{cr1} , alors que le coefficient de maintien rotationnel k_θ est nul (cependant, il peut être observé que les écarts de charge critique restent largement acceptables, inférieurs à 5%). Par conséquent, étant donné qu'un maintien rotationnel négatif n'a pas de sens, il est impossible de retrouver la rigidité du montant isolé par la seule modélisation du quart d'ouverture.

Cette observation peut remettre en question la capacité du modèle de quart d'ouverture à représenter de manière fidèle, le comportement du modèle de montant isolé avec les conditions aux limites supposées **Figure III-4**(la condition d'appui du quart peut être simplement appuyée ou maintenue élastiquement en rotation). Les diagrammes des **Figure III-20** et **Figure III-21** permettent de donner l'influence des paramètres Is , et Is/L_0 grâce aux valeurs du **Tableau III-3**.

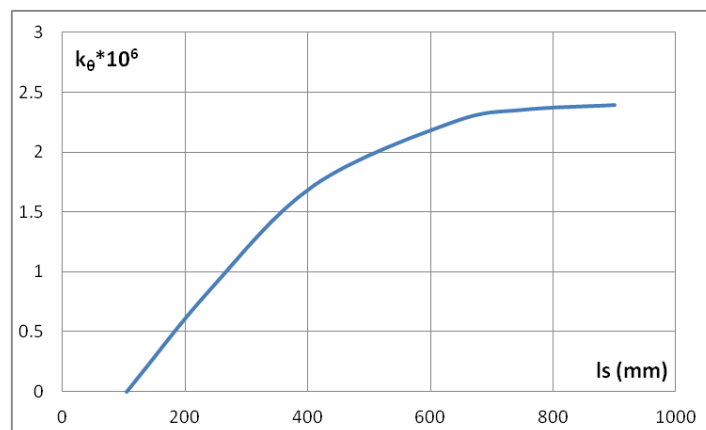


Figure III-20 Influence de la longueur de sinusoïde sur la valeur de k_θ (N.mm/°)

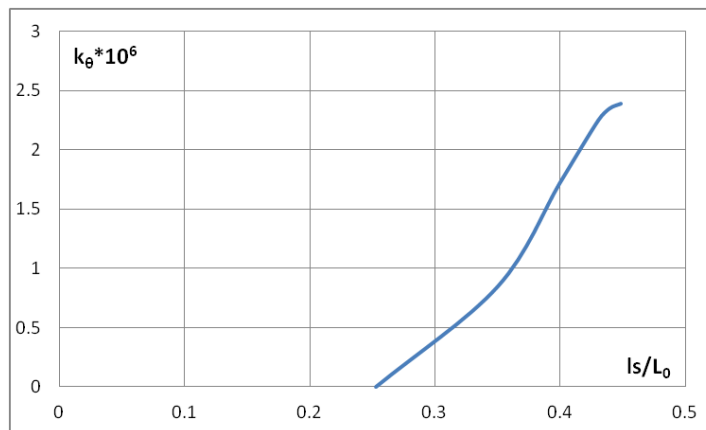


Figure III-21 Influence du rapport l_s/L_0 sur la valeur de k_θ (N.mm/°)

Les premiers diagrammes (**Figure III-20** à **Figure III-21**) permettent d'identifier clairement l'influence du paramètre de longueur de la sinusoïde. Il est possible de définir une courbe qui caractérise l'allure donnée sur la **Figure III-21**, permettant de définir ainsi la valeur du coefficient k_θ en fonction du rapport adimensionnel l_s/L_0 . D'autres études du même type sur les autres paramètres d'ouverture et de profilé ont permis de montrer que les paramètres a_0 , w , H_{tot} , t_f , t_w et b ont aussi une influence. Ainsi, pour un paramètre pris isolément, il est aisé de définir une courbe qui donne la valeur du coefficient k_θ en fonction de ce paramètre, car la réponse peut se tracer au travers d'une courbe.

Cependant, le fait de faire varier indépendamment, par exemple, deux ou plusieurs paramètres, implique que la réponse ne peut plus se tracer au travers d'une courbe mais sous forme d'une surface. Ainsi, pour établir un modèle permettant de définir la valeur du maintien rotationnel k_θ il faut se servir de techniques avancées, basées sur des études plus complètes que celles proposées. Un outil puissant qui permet de répondre à ce type de problème est la théorie des plans d'expérience [PIL, 98] [GOU, 06] [CHE, 12].

6. ETUDE PAR PLANS D'EXPERIENCE

6.1. Etat de l'art

Des études récentes sur les poutres alvéolaires ont combiné les méthodes de programmation génétique, de régression multi-linéaire et la méthode des moindres carrés pour proposer des modèles empiriques de prédiction de charge ultime de poutre alvéolaires [GAN, 11]. Cette approche existait déjà dans l'industrie, afin d'optimiser différents systèmes au travers d'un outil nommé les plans d'expérience [PIL, 01].

Le principal objectif des plans d'expérience est d'optimiser le nombre d'essais qui sont nécessaires pour identifier les effets de différents facteurs sur un système. De plus ils fournissent un bon outil pour définir les essais qui sont utiles au développement de modèles analytiques empiriques servant à prédire la réponse d'un système en fonction des paramètres les plus influents. Les plans d'expérience sont utilisés pour prédire l'optimisation de problèmes mécaniques ou structurels [MAD, 12], [AUD, 12] [GAN, 11].

Dans le cas présent de l'étude, il s'agit d'étudier l'influence de la forme d'ouverture sur le coefficient de maintien rotationnel k_θ . Ainsi, trois facteurs sont étudiés : la hauteur d'ouverture (a_0), la longueur de sinusoïde (l_s) et la largeur de montant (w).

La réponse du système (dans notre cas, la valeur du coefficient de maintien rotationnel) peut être influencée par la valeur de chaque paramètre, pris séparément, ou par l'interaction de ces paramètres (voir **Annexe C** pour plus de détail). Ici, il n'est pas possible d'anticiper l'influence de ces interactions et c'est la raison pour laquelle elles ne peuvent pas être écartées de l'analyse. Le plan d'expérience doit donc permettre de considérer toutes les formes d'interaction entre ces différents facteurs, nous établissons un **plan complet** [PIL, 01] [AUD, 12].

Un plan complet signifie que toutes les combinaisons possibles entre les trois paramètres sont étudiées. Pour cela, l'étude se planifie suivant les étapes ci-dessous [BAL, 08-1] [BAL, 08-2]:

- identifier les paramètres influents,
- définir les intervalles de validité de chaque facteur,
- développer la matrice des essais (numériques dans notre cas),
- réaliser les essais numériques,
- identifier les effets des différents facteurs,
- développer un modèle mathématique,
- valider le modèle développé.

6.2. Etude des intervalles de validité

Une fois les paramètres d'étude identifiés, il est nécessaire de définir les intervalles de chacun de ces facteurs. Le seul critère qui doit être respecté par toutes les configurations étudiées est que le

modèle du quart d'ouverture doit toujours être représentatif du comportement du modèle de montant isolé (voir **Figure III-17**).

Certaines configurations d'ouverture peuvent mener vers deux comportements différents entre deux modèles. Il peut être observé sur le **Tableau III-3** que le test n°6 révèle un problème. Le coefficient de force critique du montant isolé K_{cr1} est inférieur au coefficient de charge critique du modèle de quart d'ouverture isolé correspondant, alors que le coefficient de maintien rotationnel k_θ est nul. Ce résultat montre que, sans maintien rotationnel, le modèle de quart d'ouverture reste trop rigide par rapport au modèle de montant isolé. **La configuration d'ouverture n°6 de ce tableau présente une configuration pour laquelle le modèle simplifié de quart d'ouverture n'est plus parfaitement représentatif de la rigidité du montant isolé.**

En effet nous observons sur l'analyse de la déformée modale du montant isolé de la configuration d'ouverture n°6 (**Tableau III-3**) que certains éléments qui constituent le montant intermédiaire ont des déplacements hors plan malgré la présence d'un raidisseur transversal. Donc, pour cette configuration d'ouverture, le modèle de quart d'ouverture qui considère au moins une ligne d'appui hors plan (avec $k_\theta = 0$) est une condition d'appui fautive qui rigidifie le modèle de quart d'ouverture par rapport au modèle de montant isolé.

Finalement, il existe des configurations d'ouverture extrêmes pour lesquelles le modèle isolé du quart d'ouverture n'est plus représentatif du premier mode de voilement du modèle de montant isolé. Les travaux présentés ci-après ont pour objectif de déterminer les intervalles de valeurs des trois paramètres étudiés pour conserver un modèle de quart d'ouverture isolé représentatif du comportement du modèle de montant isolé.

Définition des valeurs extrêmes des paramètres étudiés :

L'étude présentée ici ne concerne que les paramètres géométriques d'ouverture a_0 , w et l_s . Par conséquent l'épaisseur de l'âme, l'épaisseur des semelles et la hauteur du profilé initial restent constantes et égales aux dimensions d'un profilé IPE 500.

L'étude consiste en un plan complet de trois facteurs avec trois niveaux de valeurs, ce qui entraîne un nombre de combinaison égal à $3^3 = 27$ essais. L'étude a été choisie avec trois niveaux par facteur afin d'avoir un modèle plus précis. En effet, avec seulement deux niveaux d'étude pour chaque facteur, l'interpolation est linéaire entre les deux valeurs, ce qui peut amener à un modèle bien moins précis [PIL, 01]. Dans une première étape, il a été décidé de limiter la valeur de chaque facteur aux valeurs limites de conception de poutre cellulaire globale. Les valeurs des niveaux de chacun des facteurs étudiés sont détaillées dans le **Tableau III-4** (le niveau 2 correspond à la moyenne des valeurs des niveaux 1 et 3).

Niveaux	a_0	l_s	w
1	250	200	200
2	445	515	480
3	640	830	760

Tableau III-4 Détail des valeurs des trois paramètres étudiés a_0 , l_s et w

Il s'agit ensuite d'effectuer une étude paramétrique visant à calibrer les valeurs de ces paramètres pour conserver deux modèles d'études fiables et représentatifs l'un de l'autre. Une première étude a permis de montrer que le cas critique est celui d'une ouverture maximale avec une longueur de sinusoïde minimale et une longueur de montant maximale. Il a donc été choisi de fixer la hauteur d'ouverture à sa valeur maximale et de faire varier les deux autres paramètres w et l_s . Il est possible de chercher pour quelles valeurs limites de sinusoïde l_s et de montant w , la déformée modale du modèle de montant isolé reste en accord avec les hypothèses prises par le modèle de quart d'ouverture.

Le **Tableau III-5** présente les différents cas étudiés qui permettent de calibrer les valeurs extrêmes des paramètres l_s et w , en se basant sur le cas limite $a_0 = 640\text{mm}$, $l_s = 200$ et $w = 760$.

Cas	l_s	w	K_{cr1}	$K_{cr2} (k_\theta = 0)$	Déplacement hors plan du montant
A	200	760	1856,2	1952,3	oui
B	200	650	2105,6	2172,4	oui
C	200	600	2243,5	2289,3	oui
D	250	600	2097,2	2037,0	oui
E	300	600	1963,6	1829,9	non

Tableau III-5 Résultats de l'étude des modes de ruines des modèles d'échantillons et quart d'ouverture

Le **Tableau III-5** montre que les configurations A, B, C et D représentent des ouvertures avec une faible longueur de sinusoïde en comparaison avec la largeur de montant. Ces configurations ont ainsi une forte probabilité d'avoir un montant d'âme suffisamment large pour que l'on observe des déplacements hors plan dans le quart d'ouverture, mais aussi dans la partie de montant d'âme. En effet, en présence de montants d'âme trop larges, le raidisseur transversal n'a plus une efficacité totale sur la largeur du montant.

La **Figure III-22** présente la déformée modale du modèle de montant isolé obtenue sur CAST3M pour la configuration d'ouverture D du **Tableau III-5**. Cette figure montre des déplacements hors plans de nœuds situés sur le montant d'âme (lignes blanches). Ces déplacements hors plan prouvent que, pour cette configuration d'ouverture, les conditions aux limites du modèle de quart d'ouverture ne sont plus valables.

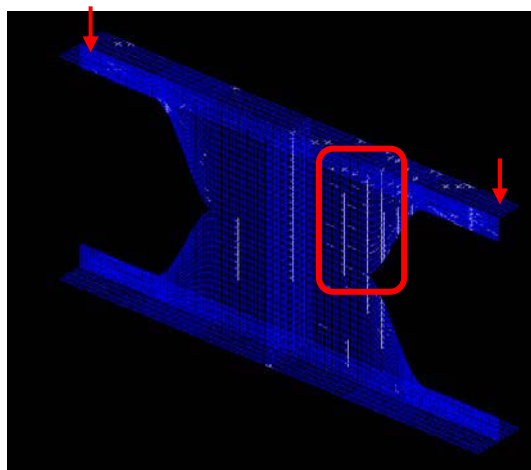


Figure III-22 Déformée modale pour le cas D du **Tableau III-5**

Le cas de la configuration D du **Tableau III-5** est donc limite car, même si le modèle de montant isolé garde une valeur de coefficient de charge critique K_{cr1} supérieure à celle du quart d'ouverture (K_{cr2}), la déformée modale montre quelques déplacements hors plan du montant. La configuration suivante (configuration E) apparaît alors satisfaisante d'un point de vue qualitatif et quantitatif. Les coefficients de charge critique des deux modèles sont identiques et la déformée modale du modèle d'échantillon est en accord avec celle du modèle de quart d'ouverture isolé.

La **Figure III-23** décrit la déformée modale des modèles de montant isolé et de quart d'ouverture de la configuration d'ouverture E. La figure ne montre aucun déplacement hors plan des nœuds dans la largeur du montant. L'hypothèse d'appui hors plan du modèle de quart d'ouverture isolé est respectée pour cette configuration.

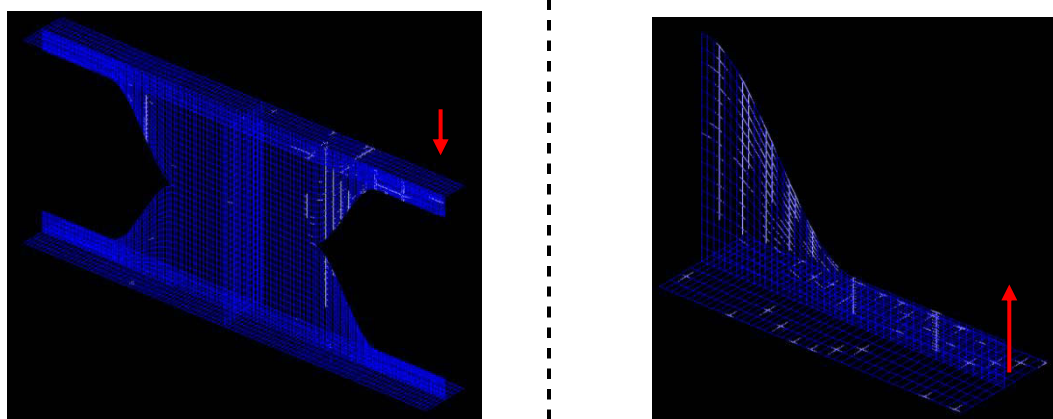


Figure III-23 Déformée modale des deux modèles étudiés pour le cas E du **Tableau III-5**

Par conséquent, les bornes à appliquer aux valeurs de l_s et de w se déduisent de cette dernière configuration et sont décrites dans le **Tableau III-6**.

Niveaux	a_0	l_s	w
1	250	300	200
2	445	565	400
3	640	830	600

Tableau III-6 Nouvelles valeurs des paramètres d'ouverture pour l'étude paramétrique

Remarque : La hauteur d'ouverture joue un rôle important dans ce problème de déplacement hors plan du montant intermédiaire. Car, plus l'ouverture est grande, moins la partie droite de l'ouverture est soumise à l'instabilité. En situation réelle, la ruine interviendrait forcément dans cette partie. Mais le calcul eulérien recherche une instabilité élastique, ce qui implique que l'on suppose une limite élastique infinie. Ainsi, comme la partie droite est très peu élancée, dans le cas de grandes ouvertures, le système se retrouve très rigide si la sinusoïde est courte. L'instabilité peut difficilement apparaître de manière localisée et se généralise sur la partie de montant, devenue trop large pour être suffisamment raidifiée par le raidisseur transversal.

En calcul élastoplastique, les ouvertures avec de larges montants et de faibles longueurs de sinusoïdes se comportent comme des ouvertures rectangulaires et non comme des ouvertures sinusoïdales.

6.3. Données pour l'étude paramétrique

Le **Tableau III-7** présente le plan complet utilisé pour cette étude paramétrique. Il donne les résultats de l'étude paramétrique en fonction des niveaux des différents paramètres étudiés. Le tableau donne pour chaque test la valeur du coefficient de maintien rotationnel k_θ qui permet de retrouver une valeur de charge critique du quart d'ouverture K_{cr2} identique à celle du modèle de montant isolé K_{cr1} .

N°	a_0	l_s	w	K_{cr1}	$k_\theta \times 10^6$	K_{cr2}
1	1	1	1	3970,2	2,37	3970,3
2	1	1	2	2864,2	1,537	2864,3
3	1	2	1	2296,9	3,386	2296,9
4	1	2	2	1806,5	2,074	1806,5
5	1	1	3	2208,2	1,102	2208,2
6	1	2	3	1494,6	1,486	1494,6
7	1	3	1	1535,4	3,568	1535,4
8	1	3	2	1276,3	2,104	1276,3
9	1	3	3	1102,1	1,514	1102,2
10	2	1	1	3727,1	1,577	3727
11	2	1	2	2694,5	1,003	2694,4
12	2	2	1	2213,4	2,85	2213,4
13	2	2	2	1755,8	1,867	1755,7
14	2	1	3	2078,7	0,649	2078,7
15	2	2	3	1450,8	1,319	1450,8
16	2	3	1	1498,9	3,275	1498,7
17	2	3	2	1251,4	2,06	1251,4

18	2	3	3	1077,7	1,469	1077,7
19	3	1	1	3521	1,109	3521,4
20	3	1	2	2542,1	0,612	2542,1
21	3	2	1	2128,6	2,29	2128,6
22	3	2	2	1701,5	1,557	1701,5
23	3	1	3	1963,6	0,305	1963,7
24	3	2	3	1405,5	1,072	1405,4
25	3	3	1	1458,7	2,863	1458,7
26	3	3	2	1224,5	1,92	1224,5
27	3	3	3	1053	1,364	1053

Tableau III-7 Matrice d'expérimentation et résultats de l'étude paramétrique

6.4. Développement du modèle mathématique [SAD, 91]

Le **Tableau III-7** résume les résultats de l'étude paramétrique et correspond à une liste de résultats qui donnent la valeur de la réponse (k_θ) en fonction des valeurs des différents paramètres d'entrée. L'objectif de cette partie est d'utiliser ces résultats afin de développer une loi polynomiale qui permet de prédire la valeur du coefficient de maintien rotationnel en fonction des paramètres géométriques d'ouverture a_0 , w et l_s .

Les modèles étudiés sont les modèles polynomiaux les plus utilisés. Ce sont des modèles empiriques, non liés au mécanisme du phénomène. Trois modèles de surfaces de réponse sont considérés : le modèle linéaire, le modèle purement quadratique (ne considère pas les termes d'interaction) et le modèle quadratique complet. Ces trois modèles sont décrits par les **Equation III-1**, **Equation III-2** et **Equation III-3**. [LE, 12]

- Le modèle polynomial du premier degré ou linéaire :

$$k_\theta = \alpha_0 + \alpha_1 \times a_0 + \alpha_2 \times l_s + \alpha_3 \times w \quad \text{Equation III-1}$$

- Le modèle polynomial du second degré purement quadratique:

$$k_\theta = \alpha_0 + \alpha_1 \times a_0 + \alpha_2 \times l_s + \alpha_3 \times w + \alpha_{11} \times a_0^2 + \alpha_{22} \times l_s^2 + \alpha_{33} \times w^2 \quad \text{Equation III-2}$$

- Le modèle polynomial du second degré ou quadratique complet (avec termes d'interaction):

$$k_\theta = \alpha_0 + \alpha_1 \times a_0 + \alpha_2 \times l_s + \alpha_3 \times w + \alpha_{11} \times a_0^2 + \alpha_{22} \times l_s^2 + \alpha_{33} \times w^2 + \alpha_{12} \times a_0 \times l_s + \alpha_{13} \times a_0 \times w + \alpha_{23} \times l_s \times w \quad \text{Equation III-3}$$

Les coefficients "α" sont déterminés à partir des résultats de l'étude paramétrique au travers d'une régression multilinéaire qui est communément appelée la méthode de la surface de réponse (basée

sur la méthode des moindres carrés). Le détail de la méthode de résolution est donné en **Annexe C**. La méthode de la surface de réponse permet de trouver les valeurs des différents coefficients des **Equation III-1** à **Equation III-3**. Ces coefficients sont détaillés dans le **Tableau III-8**.

Coefficient	Modèle linéaire (x10 ⁶)	Modèle pur quadratique (x 10 ⁶)	Modèle quadratique complet (x 10 ⁶)	Paramètres
α_0	2.83	2.45	3.05	1
α_1	-0.00172	-0.00185	-0.00507	a_0
α_2	0.00207	0.0069	0.00699	ls
α_3	-0.361	-0.00817	-0.00769	w
α_{11}		1.39×10^{-7}	1.39×10^{-7}	a_0^2
α_{22}		-4.27×10^{-6}	-4.27×10^{-6}	ls^2
α_{33}		5.69×10^{-6}	5.69×10^{-6}	w^2
α_{12}			3.14×10^{-6}	$a_0 \times ls$
α_{13}			3.64×10^{-6}	$a_0 \times w$
α_{23}			3.71×10^{-6}	$ls \times w$

Tableau III-8 Valeurs des différents coefficients pour les modèles de surfaces de réponse

6.5. Application et validation du modèle mathématique

Le diagramme donné sur la **Figure III-24** présente les différences calculées entre les trois modèles mathématiques et les résultats MEF. Ce diagramme vise à évaluer la précision des trois modèles. Ces écarts sont calculés en utilisant l'**Equation III-4**.

$$Ecart \% = \frac{valeur\ MEF - valeur\ Math.}{valeur\ MEF} \times 100$$

Equation III-4

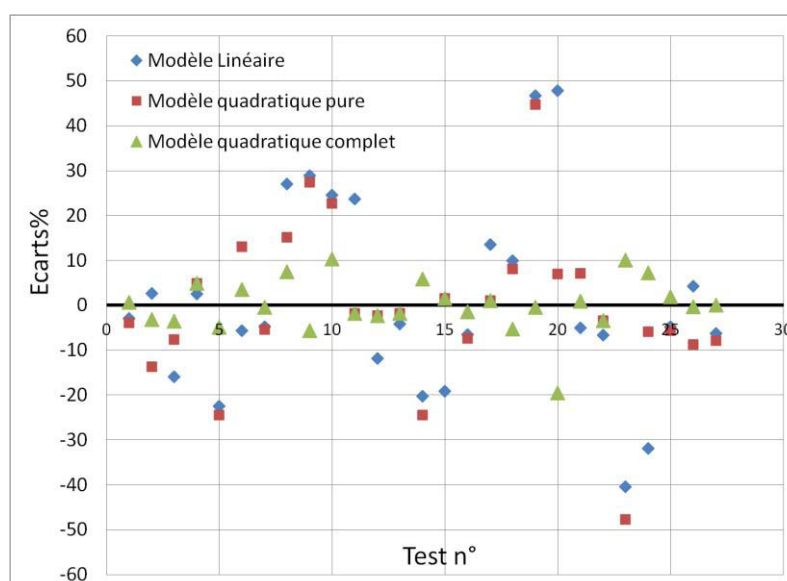


Figure III-24 Illustration de l'écart relatif pour les différents modèles mathématiques avec les résultats MEF

La **Figure III-24** montre que le modèle quadratique complet reste proche des résultats MEF alors que les deux autres modèles montrent des écarts bien plus importants dans certains cas. Cette comparaison met en avant l'importance de considérer les termes d'interaction pour prédire la valeur du maintien rotationnel. Au regard des résultats obtenus, le modèle quadratique complet pourrait être considéré comme fiable et validé. Cependant, pour valider un méta modèle comme ceux présentés, il est nécessaire d'effectuer des tests qui n'ont pas servi à la calibration du modèle.

Le **Tableau III-9** expose les trois tests effectués pour valider le modèle mathématique développé.

a_0 (mm)	l_s (mm)	w (mm)	MEF k_θ (N.mm/°)	Ecart Modèle linéaire %	Ecart modèle quadratique pur %	Ecart Modèle quadratique complet %
500	500	300	2.035	5.60	1.47	4.20
500	400	500	1.0853	8.66	9.98	5.10
350	700	500	1.716	-9.03	-10.49	-3.21

Tableau III-9 Comparaison des écarts entre les différents méta-modèles et les résultats MEF

Le **Tableau III-9** montre que le modèle quadratique complet reste proche des résultats MEF. Les écarts pour les modèles linéaire et quadratique peuvent apparaître importants dans des cas pour lesquels les paramètres sont sur des valeurs extrêmes. Ces derniers exemples confirment l'intérêt d'utiliser un modèle quadratique complet. Finalement, le modèle quadratique complet permet d'avoir une prédiction fiable et réaliste de la valeur du coefficient de maintien rotationnel en fonction des paramètres géométriques d'ouverture.

7. CONCLUSION

L'objectif de cette partie a été de **définir de manière précise la semi-rigidité de la liaison entre la paroi d'une ouverture sinusoïdale et le montant d'âme pleine adjacent**. Cette semi-rigidité a été mise en évidence en fin de deuxième partie au travers d'un coefficient de maintien rotationnel k_θ . Le principe a été de faire une étude paramétrique sur la base de calculs eulériens afin d'étudier l'influence des différents paramètres géométriques d'ouverture sur la semi-rigidité de la connexion. Cependant ces paramètres géométriques ne jouent pas seulement sur la rigidité du modèle mais aussi sur le système de chargement. C'est pourquoi nous avons axé l'analyse sur un modèle géométrique plus simple que celui d'une poutre globale, le modèle de montant isolé.

Après avoir validé le nouveau modèle numérique, développé sur Cast3m, sur la base des études expérimentales, il a pu être utilisé en tant qu'outil numérique pour effectuer l'étude paramétrique en calcul eulérien. Cette étude a consisté à comparer les premiers modes d'instabilité du montant isolé et du modèle de quart d'ouverture isolé muni d'un maintien rotationnel élastique. Nous avons pu ensuite calibrer la valeur de ce maintien rotationnel afin d'obtenir un premier mode de voilement du modèle de quart isolé similaire à celui obtenu avec le même quart dans le modèle

de montant isolé. Cette étude a permis d'identifier clairement la semi-rigidité de liaison entre montant d'âme et la paroi du quart d'ouverture.

Pour que cette étude soit valable, il est **impératif que les modes de voilement des deux quarts d'ouverture**, entre échantillon de montant isolé et poutre globale, **soient identiques**. Il est donc nécessaire de retenir seulement les cas avec instabilité locale dans le quart d'ouverture. Dans ce but nous avons choisi d'étudier exclusivement un modèle de montant isolé muni d'un raidisseur transversal afin d'éviter les modes d'instabilité combinés entre instabilité locale et globale du montant isolé.

De plus, afin d'assurer que le modèle de quart d'ouverture isolé reste représentatif du montant isolé correspondant dans la poutre globale, plusieurs études numériques ont été nécessaires afin de calibrer les bornes géométriques des paramètres d'ouverture l_s , w et a_0 . Une fois les deux modèles validés et les bornes géométriques des différents facteurs étudiés établies, une étude paramétrique a été menée sur la base de plans d'expériences.

Le résultat final est une loi polynomiale qui définit la valeur du coefficient k_θ en fonction des paramètres géométriques d'ouverture w , l_s et a_0 (**Equation III-3** et **Tableau III-8**). Ce coefficient peut être directement appliqué à un modèle de quart d'ouverture seul, pour définir de manière plus précise la rigidité hors plan de chacune des sections du quart d'ouverture. Ce calcul a pour objectif d'améliorer le modèle analytique qui définit la résistance des différentes sections d'un quart d'ouverture. Un nouveau modèle analytique intégrant le maintien rotationnel défini ci-dessus peut être développé afin de mieux considérer les conditions aux limites des différentes sections d'un quart d'ouverture.

La partie suivante se concentre sur le développement du modèle analytique de calcul de la résistance des sections Té appartenant au quart d'ouverture. Le travail consiste tout d'abord à évaluer les modèles existants. Une fois les problèmes correctement identifiés, il sera possible de proposer une adaptation de ces modèles au cas considéré du quart d'ouverture et d'ouvrir une piste de développement pour insérer le calcul du coefficient de maintien rotationnel.

PARTIE IV - ETUDE ANALYTIQUE DU QUART D'OUVERTURE ISOLE -

- 1- Introduction
- 2- Etude des premiers modèles analytiques de quarts d'ouverture
- 3- Etude du critère de stabilité
- 4- Adaptation du calcul de plaque au quart d'ouverture
- 5- Plaques semi-compactes
- 6- Conclusion

1. INTRODUCTION

Les parties précédentes ont pour principal objectif de mieux comprendre le comportement complexe des poutres cellulaires et particulièrement les poutres à ouvertures sinusoïdales. Les essais ainsi que les études numériques faites sur les poutres à échelle 1 ont permis de clairement identifier les modes de ruines inhérents à une poutre à ouvertures sinusoïdales. Ces études ont validé le fait que la ruine d'une ouverture sinusoïdale peut être due soit à la plastification des coins de l'ouverture, soit à l'instabilité des parois sinusoïdales dont les fibres en bord libre sont comprimées. Ainsi, nous avons montré que la position de la zone de ruine peut varier suivant la forme de l'ouverture. Elle peut se situer à la jonction de la sinusoïde avec la partie droite pour la plastification (considérée comme le coin de l'ouverture), ou dans la sinusoïde pour le voilement local (voir **Figure IV-1**).

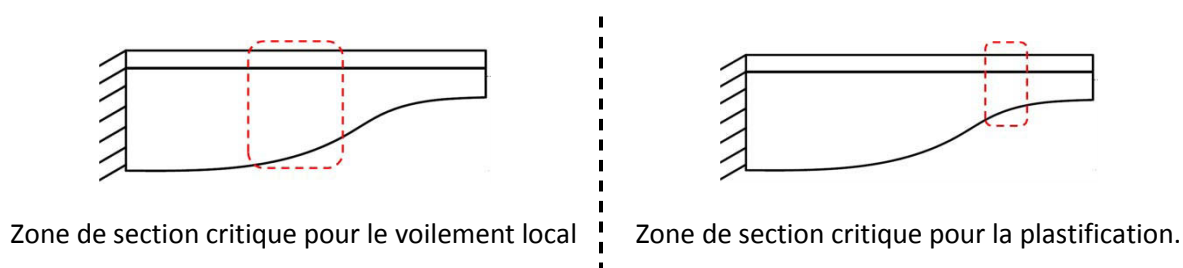


Figure IV-1 Illustration des deux cas de ruine possible autour d'une ouverture sinusoïdale

Les études numériques ont permis de valider les hypothèses analytiques relatives à la distribution des efforts autour de l'ouverture ainsi que l'approche qui consiste à décomposer l'ouverture en quatre quarts. Dans cette partie quatre, il s'agit de développer un modèle de calcul permettant de définir la résistance de chaque quart d'ouverture de la façon la plus précise possible. Le premier paragraphe résume les modèles existants de calcul de la résistance d'une ouverture hexagonale ou circulaire en vue d'évaluer leurs adaptations aux ouvertures sinusoïdales.

Ces modèles sont basés sur les principes des Eurocodes et notamment sur la classification des sections. Ces applications vont montrer plusieurs lacunes étant donné que ces modèles n'ont pas été développés pour traiter le cas particulier de l'ouverture sinusoïdale. Ainsi, nous allons développer un nouveau critère de stabilité de plaque qui nous permet de mieux représenter la stabilité des sections qui composent l'ouverture sinusoïdale.

En appliquant les théories sur la stabilité des plaques, nous proposons un nouveau calcul du coefficient de contrainte critique k_{σ} . Ce coefficient de contrainte critique peut par la suite être utilisé pour définir la résistance ultime de plaques comprimées correspondant aux différentes sections constituant le quart d'ouverture. Ainsi, ce travail aura pour finalité de mieux définir les résistances plastiques et élastiques des différentes sections en T qui composent l'ouverture tout en continuant à adopter la démarche des Eurocodes.

2. ETUDE DES PREMIERS MODELES ANALYTIQUES DE QUARTS D'OUVERTURE

Nous avons montré précédemment qu'une ouverture peut se décomposer en quarts d'ouverture soumis à des efforts locaux résultants des sollicitations globales (voir **Figure IV-2**). Cette forme de discrétisation est particulièrement bien adaptée à l'étude de larges ouvertures à section variable.

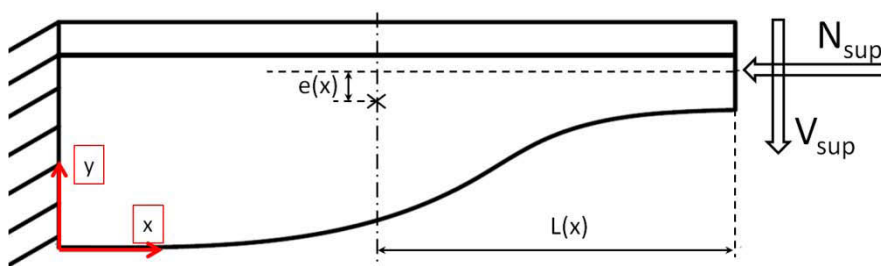


Figure IV-2 Exemple de modèle de quart d'ouverture seul avec l'étude d'une section verticale d'abscisse x

La détermination de la résistance de chaque section est la principale difficulté analytique. En effet, pour déterminer les résistances réelles des sections, il est nécessaire de considérer les conditions de maintien des parois comprimées vis-à-vis des instabilités locales.

Les chapitres suivants présentent les premières approches proposées permettant de justifier la résistance des sections selon leurs positions dans les différentes parties de l'ouverture.

2.1. Modèle avec classification des sections suivant l'Eurocode

La première démarche a été de proposer un modèle analytique de dimensionnement des poutres cellulaires en respectant au maximum les critères fournis par les normes actuelles des Eurocodes. Notamment pour établir la résistance de sections en T, l'Eurocode définit des critères de classification des parois en console constituant la section en T (voir **Figure I-30**). [EN3-1-1]

Cependant cette simple application des critères de classification pour des poutres à ouvertures sinusoïdales montre rapidement des limites théoriques. Les premières comparaisons avec les résultats MEF et les essais montrent des écarts importants de charge ultime. Le **Tableau IV-1** présente les efforts ultimes numériques et analytiques pour les trois poutres testées en deuxième partie. Le tableau précise, pour le calcul analytique, les efforts nécessaires à la ruine du quart supérieur et du quart inférieur d'ouverture qui correspondent aux quarts les plus critiques. La valeur minimale entre les deux correspond théoriquement à la ruine de l'ouverture et par conséquent à la ruine de la poutre. [CHU, 01], [BIT, 04]

Poutre testée	$F_{ult\ MEF}$ (kN)	$F_{ult\ Analytique}$ (kN)	Analytique/MEF
AS012	486,1	260 (1/4 sup) 184 (1/4 inf)	0,38
AS016	234	208(1/4sup) 164(1/4 inf)	0,70
AS018	588,4	172(1/4sup) 212(1/4inf)	0,29

Tableau IV-1 Comparaison efforts ultimes Essais/MEF/Analytique des essais de la deuxième partie

L'étude effectuée en deuxième partie a montré que le modèle de quart d'ouverture était bien représentatif des sollicitations autour d'une ouverture. L'application de la classification de l'Eurocode aux cas de sections constituant une ouverture sinusoïdale montre des résultats conservatifs et très éloignés des résultats MEF. Il est donc nécessaire d'envisager une autre approche ou de développer un nouveau critère de classification de ces sections.

Les exemples traités dans les deux paragraphes suivants mettent en évidence les problèmes liés à cette simple application pour deux cas de chargement d'un quart d'ouverture.

2.1.1. Exemple du quart d'ouverture en traction pure

Dans une zone de moment constant sur la longueur d'une poutre cellulaire, les membrures sont soumises à des efforts de compression ou de traction sans cisaillement. Cette configuration permet donc d'étudier le comportement d'un quart d'ouverture en traction simple. Le modèle numérique donne une ruine par traction du Té au droit de l'ouverture en membrure inférieure (ou compression pour la membrure supérieure). En revanche, le modèle analytique, en considérant une résistance de sections uniquement basée sur l'application des critères de classification de l'Eurocode, donne une ruine par instabilité locale de l'âme en flexion composée. En effet, la traction au droit de l'ouverture implique un moment fléchissant dans les sections les plus élancées de la paroi sinusoïdale comme illustré sur la **Figure IV-3**.

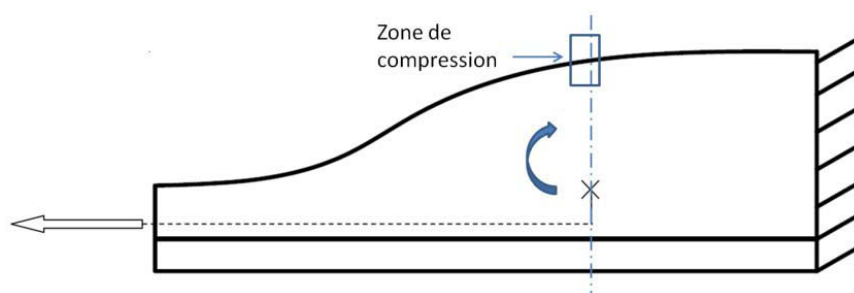


Figure IV-3 Illustration de la flexion induite par l'excentrement de l'effort axial

La zone de compression se trouve au niveau des fibres en bord libre, ce qui correspond au cas le plus défavorable et peut entraîner, selon le calcul analytique inspiré de l'Eurocode 3, une réduction importante de la résistance des sections due au voilement local. La conséquence aberrante

est que d'un point de vue analytique, la résistance d'un élément en Té tendu de section constante est supérieure à celle du même élément avec une variation de section comme illustré à la **Figure IV-4**.

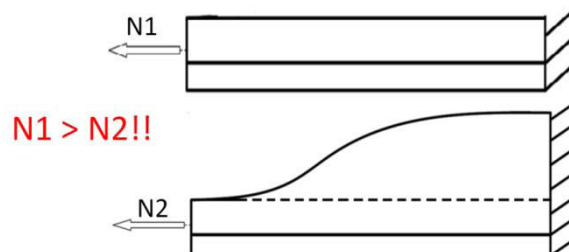


Figure IV-4 Comparaison d'un élément à section constante et un élément à section variable type quart d'ouverture sinusoïdale

Il est bien évident que la résistance à la traction du second cas est égale au Té de hauteur constante (le plus petit té du quart d'ouverture). L'écart vient d'un point particulier : la classification des sections verticales est trop sévère et mal adaptée aux sections en Té d'une ouverture. Appliquer simplement la classification des sections verticales implique que les sections les plus élancées se retrouvent en classe 4, avec des résistances inférieures à la résistance plastique du petit Té. De plus, les premiers modèles consistaient à calculer le moment plastique en flexion simple et le réduire par interaction M-N quadratique. Or, cette méthode entraîne une erreur importante sur la position réelle de l'axe neutre plastique et donc de la zone réellement comprimée sur la hauteur d'âme. Diminuer cette hauteur améliore nécessairement la classification de la section.

Les observations faites entre les résultats numériques et analytiques permettent de mettre en évidence l'importance de l'interaction M-N plastique d'un Té. En effet les effets de la flexion liée à l'excentrement de l'effort axial sont opposés à l'effet de l'effort axial, ce qui implique que les sections en Té se situent sur la partie parabolique du diagramme d'interaction plastique M-N. (**voir détails en Annexe B**). Enfin elles montrent le premier problème, lié à la seule classification verticale des sections qui s'avère être très conservatrice.

2.1.2. Exemple du quart d'ouverture en flexion simple

Les premières études de quarts d'ouverture en flexion simple faites sur le modèle de montant isolé en troisième partie permettent de confirmer l'écart de résultat qui existe entre le modèle réel (ou numérique) avec le modèle analytique. Le **Tableau IV-2** rappelle les résultats expérimentaux, MEF et analytiques des charges ultimes obtenues pour les différents essais.

Echantillon	$F_{ult,Test}(kN)$	$F_{ult,MEF}(kN)$	$F_{ult,anal.}(kN)$	$F_{analytique}/F_{MEF}$
A-1	290,4	295,3	114	0,39
A-2	306	295,3	114	0,39
A-S-1	306,4	301,4	114	0,38
A-S-2	343,3	301,4	114	0,38
B-1	211,8	203,8	145	0,72

B-2	191,9	203,8	145	0,72
C-1	393,5	394,6	130	0,33
C-2	420	394,6	130	0,33
C-S	418,4	392,7	130	0,33

Tableau IV-2 Rappel des résultats expérimentaux, MEF et analytiques des essais de la troisième partie

Le **Tableau IV-2** montre que les écarts de charge ultime entre le modèle analytique et le modèle numérique sont relativement importants. Il peut être rappelé que les échantillons B ont une ruine plastique. Ainsi, si l'adaptation de la classification de l'Eurocode permettait de justifier une résistance plastique du quart d'ouverture, l'effort ultime analytique du quart d'ouverture serait alors de 180 kN (l'écart de résultat avec le résultat MEF passerait alors de 0,7 à 0,9).

Ces écarts importants seraient donc principalement liés à la mauvaise estimation de résistance du quart d'ouverture. La **Figure IV-6** présente le diagramme de moment résistant et de moment sollicitant d'un quart d'ouverture soumis à de la flexion simple (**Figure IV-5**).

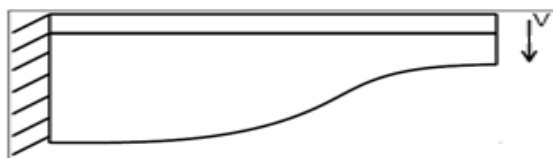


Figure IV-5 Modèle de quart d'ouverture en flexion simple

Le diagramme de moment fléchissant (en pointillés rouge) de la **Figure IV-6** est linéaire et croît sur la longueur du quart d'ouverture. L'abscisse $x = 425\text{mm}$ est celle de la section du point d'application de l'effort V et l'abscisse $x = 0$ correspond à la section au niveau de la liaison entre l'ouverture et le montant d'âme intermédiaire (représenté par des hachures sur la **Figure IV-5**). La **Figure IV-6** montre que les sections qui se situent sur la partie droite du quart d'ouverture (avec la hauteur minimale) ont un élancement vertical le plus faible. Par conséquent, la classification verticale de ces sections permet de justifier une résistance plastique et le diagramme de moment résistant (vert gras) est confondu avec le diagramme de moment résistant plastique (violet fin).

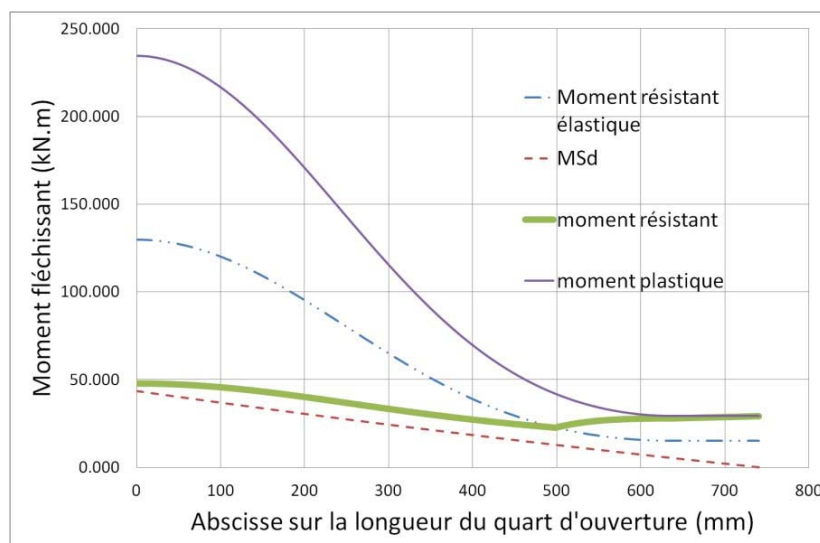


Figure IV-6 Diagrammes de moments résistants élastique, plastique, réel et moment sollicitant

Par contre, les sections proches du montant (des hachures) ont un élancement vertical maximal, ce qui implique une forte réduction de leurs résistances. La **Figure IV-6** montre que le moment résistant est bien en-deçà du moment résistant élastique de ces sections (en bleu). Les sections de plus fort élancement ont leurs résistances limitées, à cause du voilement local. Cependant, il va de soi que les sections adjacentes au montant d'âme bénéficient d'un certain support hors plan et ne peuvent donc pas voiler. Il est donc possible de justifier au moins une résistance élastique de ces sections. Dans le but de justifier une meilleure résistance des sections des quarts d'ouverture, il convient de mieux appréhender la stabilité des sections les plus élancées verticalement mais proche du montant d'âme pleine. Ce montant d'âme adjacent à l'ouverture fournit au moins un support hors plan à ces sections. Enfin, la troisième partie de ce document a permis de mettre en évidence et de quantifier la semi-rigidité de la liaison entre le montant d'âme intermédiaire et la paroi de l'ouverture.

2.1.3. Combinaison de classification de section

Une première approche était proposée pour mieux caractériser la résistance des sections. Elle consiste à combiner des classifications des sections horizontales et verticales autour de l'ouverture.

Une longueur « x » du quart d'ouverture, en partant du montant (hachures sur la **Figure IV-7**), est déterminée. Cette dimension horizontale, en se basant sur le critère de classe 3 d'une paroi comprimée [EN3-1-5], sert à justifier que les sections proches du montant peuvent conserver leurs caractéristiques élastiques. La combinaison de ces deux classifications est exposée sur la **Figure IV-7** (voir **Figure I-30** pour rappel des différents paramètres utilisés).

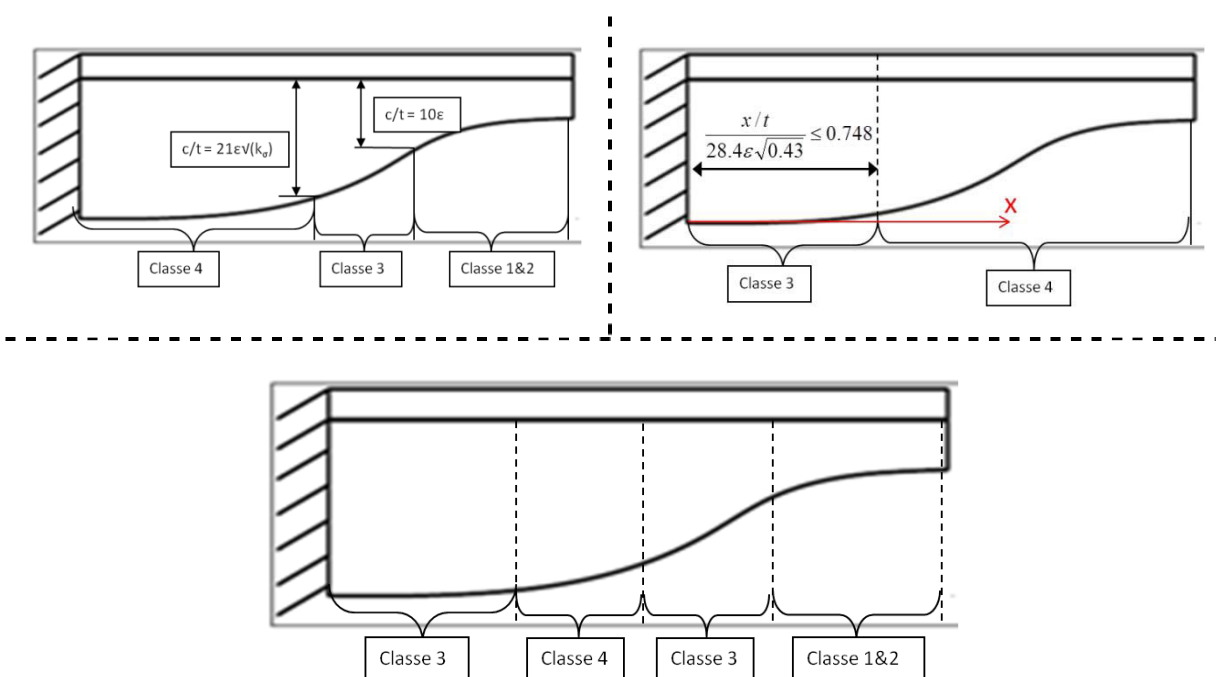


Figure IV-7 Superposition des deux critères de classification

Cette première approche a permis d'améliorer les résultats et de mieux concorder avec les modes de ruine observés par éléments finis. Cependant, cette méthode est encore trop conservatrice car elle ne permet de justifier que la résistance élastique de ces sections. Elle améliore les résultats mais reste peu représentative de la réalité.

Ce système de classification horizontale est difficilement justifiable d'un point de vue théorique mais donne les prémices de la présente étude ; laquelle vise tout d'abord à mieux caractériser la stabilité des sections proches du montant intermédiaire. L'objectif à la fin de cette partie est de proposer un nouveau critère de classification, basé sur les critères de l'Eurocode et les éléments théoriques de stabilité des plaques.

2.2. Modèle avec adaptation de la classification de l'Annexe N

2.2.1. Présentation du modèle

La classification de l'Eurocode semble être trop conservatrice. Même si l'on considère une classification horizontale, les résultats peuvent avoir des écarts importants par rapport aux résultats numériques. Une seconde approche proposée consiste à adapter les classifications existantes des poutres alvéolaires au cas d'ouvertures sinusoïdales. Ceci concerne les formules servant à classer les ouvertures hexagonales [ENV, 95], proches de la forme sinusoïdale. L'annexe N [ENV, 95] classifie l'ouverture suivant l'âme du petit Té au droit de l'ouverture et ce, jusqu'à ce que la « pente du montant » devienne trop faible (ce qui revient à une longueur de sinusoïde trop importante par rapport à la longueur d'ouverture). Dans ce cas, il faut alors classer une section en Té équivalente plus grande (voir Figure IV-8). La Figure IV-8 présente, pour les formes d'ouvertures connues, les paramètres géométriques nécessaires à la classification de l'ouverture.

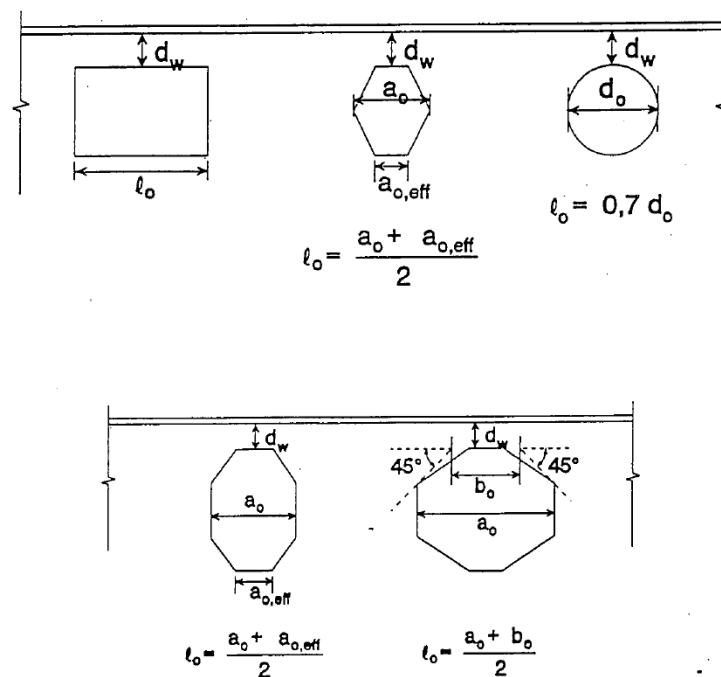


Figure IV-8 Définition pour différentes formes d'ouvertures des paramètres géométriques de classification [ENV, 95]

Le critère de classification se définit ensuite tel que :

- Ouverture de classe 2 :

$$l_0 \leq 32 \cdot \varepsilon \cdot t_w \text{ ou } dw \leq \frac{10 \varepsilon t_w}{\sqrt{1 - \left(\frac{32 \varepsilon t_w}{l_0} \right)^2}}$$

- Ouverture de classe 3 :

$$l_0 \leq 36 \cdot \varepsilon \cdot t_w \text{ ou } dw \leq \frac{14 \varepsilon t_w}{\sqrt{1 - \left(\frac{36 \varepsilon t_w}{l_0} \right)^2}}$$

Dans le but d'adapter cette classification aux ouvertures sinusoïdales, il suffit de proposer une adaptation des paramètres géométriques des ouvertures hexagonales aux ouvertures sinusoïdales. La **Figure IV-8** met en évidence le fait que ces paramètres se distinguent suivant la longueur de l'ouverture l_0 . De la même façon, il est possible de définir des paramètres géométriques définissant l'ouverture sinusoïdale.

Pour les ouvertures sinusoïdales, l'adaptation que nous proposons donne :

- ➔ Pour les ouvertures courtes telles que : $a_0 / (2 \times l_s) > 1$:
 - dw = hauteur du petit Té au droit de l'ouverture.
 - $l_0 = w/2 + l_s$
- ➔ Pour les ouvertures longues:

- dw = hauteur du petit Té au droit de l'ouverture.
- $l_0 = (w + 2 \times l_s) - a_0/2$

2.2.2. Critique de l'adaptation de cette classification d'ouverture

Une étude préliminaire d'un quart d'ouverture en flexion simple compare les résultats MEF avec ceux déduits analytiquement par l'intermédiaire de l'adaptation faite de la classification de l'annexe N. Les résultats montrent que cette classification est mal adaptée à cette forme d'ouverture et peut même, dans certains cas, s'avérer insécuritaire. Cette classification a été développée pour caractériser la résistance globale d'une ouverture. En effet, cette classification s'applique à toute l'ouverture. Par conséquent, celle-ci ne permet pas de considérer le fait que différentes parties d'une même ouverture puissent avoir différents modes de ruine.

De plus, nous avons vu en première partie que cette classification est basée sur l'hypothèse d'une classification de membrure d'une ouverture rectangulaire considérée comme encastree sur trois bords (voir **PARTIE I §3.3.2**). Cette hypothèse constitue une hypothèse forte notamment au vu de l'étude menée en troisième partie, laquelle expose une connexion semi-rigide entre le montant d'âme intermédiaire et les parois constitutives de l'ouverture.

Finalement, dans le but de fournir un modèle analytique fiable et représentatif du comportement mécanique des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales, nous privilégions la démarche incrémentale, qui consiste à étudier les sollicitations et résistances des différents quarts d'ouverture. Cette démarche permet de mieux appréhender les résistances des différentes parties de l'ouverture et de mieux décrire leurs différents modes de ruine. Nous verrons en dernière partie de ce travail, que distinguer les résistances des différentes parties de l'ouverture permettra de définir une résistance finale de l'ouverture fiable et réaliste.

2.3. Bilan

Nous avons constaté que la meilleure approche de calcul de résistance d'une ouverture sinusoïdale est la vérification incrémentale qui consiste à parcourir « toutes » les sections. En effet, les sections critiques dans les différentes parties de l'ouverture sont différentes et ne peuvent être localisées qu'au travers d'une approche incrémentale. Cette dernière pose le problème de justifier correctement la résistance de chaque section étudiée le long de l'ouverture réduite par l'éventuel voilement local pouvant survenir avant d'atteindre la résistance plastique ou élastique de la section. Les méthodes réglementaires actuelles ne permettent pas de vérifier ce genre de sections en Té dans une configuration d'ouverture. L'adaptation des critères de classification actuels a montré plusieurs lacunes, notamment le fait qu'ils ne permettent pas de tenir compte du support hors plan apporté par le montant d'âme intermédiaire.

En premier lieu il avait été choisi d'adapter la classification de l'Eurocode 3 des parois en console (semelle des profilés en I ou en H, et âme des sections en Té) pour classer l'âme des sections en Té, le long de l'ouverture, en considérant une forme de classification horizontale de ces

sections. Cette méthode peu justifiée théoriquement a montré des limites au niveau de la qualité des résultats. Ensuite, l'adaptation de la classification d'ouverture hexagonale proposée par l'Annexe N (version ENV de l'EC3) peut montrer un caractère insécuritaire. De plus, cette forme de classification ne permet pas de distinguer les différents modes de ruine existant autour de l'ouverture pour les études des différentes parties de l'ouverture sinusoïdale.

Finalement, les deux méthodes proposées montrent des faiblesses que nous allons essayer de combler. Ces premières approches constituent les prémices de l'étude qui suit. L'objectif de la partie suivante est de développer un nouveau critère de classification qui permet de tenir compte de l'éloignement des sections étudiées par rapport au montant d'âme adjacent, pouvant être considéré au moins comme un support hors plan, sur la base d'éléments théoriques de stabilité des plaques.

3. ETUDE DU CRITERE DE STABILITE

3.1. Instabilité élastique des plaques minces

3.1.1. Introduction

L'Eurocode fournit des critères d'élancement de paroi qui permettent de déterminer la capacité d'une section en T à atteindre son moment plastique ou élastique. Cependant, ces critères ont été développés pour traiter les cas de semelles de profilés et non des sections au sein d'un quart d'ouverture sinusoïdale. [MAI, 09]

En effet, une première analyse des critères issus de l'Eurocode nous permet de constater qu'ils ne permettent pas de tenir compte des conditions de maintien des sections en T d'un quart d'ouverture. Ces maintiens sont principalement liés à la liaison entre le quart d'ouverture et le montant d'âme pleine intermédiaire (voir **Figure I-28** ou **Figure IV-7** en haut à gauche).

Dans le but de mieux considérer les conditions de maintien réelles des sections d'un quart d'ouverture, il est nécessaire de revenir à un calcul de stabilité de plaque. En effet, les formules de l'Eurocode qui classifie les sections en T se basent sur un calcul de contrainte critique de plaque en console. Cette partie s'intéresse tout d'abord aux méthodes de calcul de la contrainte critique d'une plaque comprimée en vue de l'adapter au cas particulier d'une plaque en console chargée par un diagramme de contrainte linéaire.

La méthode de résolution choisie pour traiter le problème de stabilité de plaque est la méthode énergétique. En effet, plusieurs recherches prouvent l'efficacité de cette méthode énergétique. Par exemple, l'article proposé par S.T. Smith, M.A. Bradford et D.J. Oehlers [SMI, 99] donne les valeurs des coefficients de voilement pour une configuration de plaque simplement appuyée ou totalement encastree sur ses 4 bords en cisaillement pure. La démarche est similaire à

celle développée par Timoshenko et par Rayleigh-Ritz⁷ avant lui, en considérant une fonction de déplacement « w » appropriée pour ensuite l'appliquer aux calculs de l'énergie potentielle totale qui doit être nulle pour déterminer les efforts critiques.

Ensuite nous présentons les méthodes qui permettent de définir la résistance ultime des plaques en fonction de leurs contraintes critiques. Puis, nous exposons l'adaptation du calcul de plaque aux différentes sections constituant le quart d'ouverture. Enfin, l'application des théories sur les plaques semi-compactes permettra de définir de manière réaliste la résistance des différentes sections en T autour de l'ouverture sinusoïdale en fonction de leurs élancements critiques, déduits du nouveau modèle de calcul de contrainte critique.

3.1.2. Contrainte critique de voilement élastique sous compression uniforme

L'étude de plaque que nous développons est basée sur la méthode énergétique. Celle-ci est d'abord appliquée au cas simple d'une plaque de longueur a, appuyée sur son contour et uniformément comprimée sur ses côtés opposés de largeur b (**Figure IV-9**)⁸.

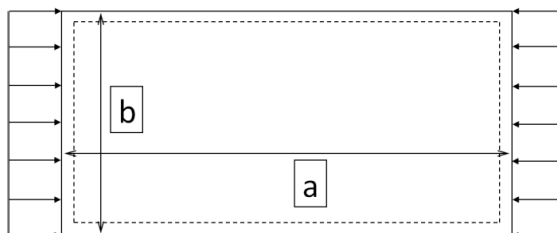


Figure IV-9 Plaque uniformément comprimée simplement appuyée sur son contour

Il peut être montré que la contrainte critique de voilement σ_{cr} peut s'écrire par l'expressions suivante : [TIM, 43] [BLE, 52]

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 a D}{m^2 t} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad \text{Equation IV-1}$$

Avec :

- n : le nombre de demi-ondes de voilement de la plaque dans la direction perpendiculaire au chargement,

⁷ Premier auteur à proposer de représenter la déformée d'une plaque sous forme de série trigonométrique [BAS, 72].

⁸ Une autre méthode possible reste la résolution de l'équation différentielle de déformée de la plaque [SWA, 95]. Quelques exemples de plaques et de résolutions sont donnés par Timoshenko, [TIM-1, 13].

- m : le nombre de demi-ondes de voilement de la plaque dans la direction parallèle au chargement.

Il est évident que la plus petite valeur de σ_{cr} sera celle pour laquelle $n = 1$, ce qui correspond au voilement en une demi-onde dans le sens perpendiculaire à la direction de la compression. En désignant par $\alpha = a/b$, le rapport des dimensions de la plaque (**Figure IV-9**) on obtient pour la contrainte critique :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \quad \text{Equation IV-2}$$

En reprenant l'expression théorique de la contrainte d'Euler $\sigma_E = [\pi^2 E / 12(1-\nu^2)](t/b)^2$, un coefficient de contrainte critique k_σ est défini par la relation suivante :

$$\sigma_{cr} = k_\sigma \times \sigma_E \quad \text{Equation IV-3}$$

Le coefficient de contrainte critique pour ce cas de plaque appuyée sur son contour, uniformément comprimé sur la largeur, peut s'écrire : $k_\sigma = (m/\alpha + \alpha/m)^2$. L'ensemble des courbes donnant la valeur de k_σ en fonction du rapport α est donnée à la **Figure IV-10**.

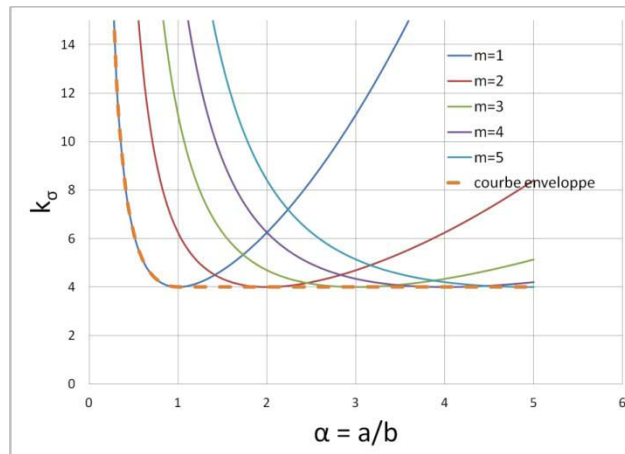


Figure IV-10 Coefficient k_σ en fonction de α pour une plaque comprimée simplement appuyée

On peut constater que la contrainte critique peut légèrement augmenter pour des valeurs de α non entière. Par contre, pour des valeurs de ce rapport $\alpha < 1$, la proximité des appuis permet d'augmenter de manière significative la valeur de la contrainte critique. **Bien que ce domaine d'utilisation soit moins courant, il s'avèrera justement très utile dans le cas qui concerne l'objet de ce travail.**

Cependant, l'Eurocode définit une valeur unique du coefficient de contrainte critique pour vérifier la résistance d'une paroi interne telle que l'âme d'un profilé IPE (qui est de 4 pour la

compression uniforme). En effet, les formules du coefficient de contrainte critique, définies par l'Eurocode, ne tiennent pas compte de la longueur de la plaque considérée [EN-3-1-5] et se limitent à la partie asymptotique du diagramme k_σ/α montré sur la **Figure IV-10** (valable pour les plaques longues). Des améliorations du calcul de ce coefficient peuvent donc être effectuées en prenant en compte simplement la longueur de plaque.

De plus, il apparaît que l'Eurocode considère, pour vérifier la stabilité d'une âme de profilé, une plaque appuyée sur 4 bords. Par conséquent les formules fournies ne tiennent pas compte d'éventuels maintiens rotationnels ou encastremets apportés par les semelles de la poutre à l'âme. Nous verrons dans le paragraphe suivant l'influence non négligeable des conditions de maintien sur la rigidité des plaques. Bien prendre en compte les conditions de maintien peut permettre d'augmenter de manière significative la valeur de la contrainte critique.

3.1.3. Influence des conditions de maintien et conditions de chargement

Les maintiens d'une plaque influent directement sur sa rigidité. Augmenter les maintiens aux appuis revient à diminuer la longueur d'onde de voilement de la plaque et augmente sa rigidité. La **Figure IV-11** présente l'évolution du coefficient k_σ en fonction du rapport α et des conditions de chargement. Pour une plaque suffisamment longue, le fait d'encastrer les deux bords longitudinaux permet de passer pour la valeur de k_σ de 4 à 6,97.

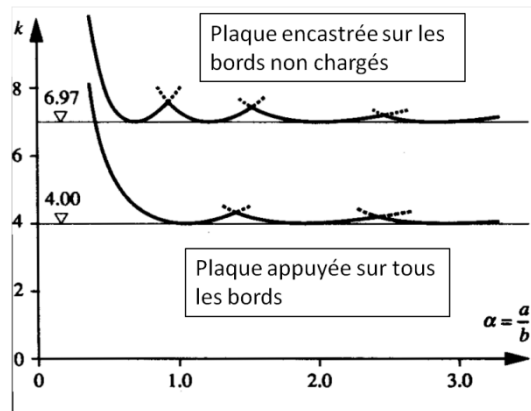


Figure IV-11 Evolution du coefficient k_σ pour une plaque simplement appuyee et une plaque encastree sur les deux bords non charges [MAN, 94]

Il revient à Timoshenko d'avoir résolu un grand nombre de problèmes de stabilité de plaques suivant diverses conditions d'appui et de chargement. Il propose dans les annales des Ponts et Chaussées de 1913 la résolution de différents problèmes de stabilité de plaque à l'aide de la méthode de l'énergie, en adoptant des formes plus ou moins approchées de la déformée w [TIM-1, 13], [TIM-4, 13]. Par contre, dans son ouvrage sur la théorie de la stabilité élastique, il présente l'étude faite sur plusieurs configurations d'appui en résolvant l'intégration de l'équation d'équilibre de la plaque en utilisant la forme suivante pour la déformée w :

$$w = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Equation IV-4

Dans cette expression, $f(y)$ est une fonction de y seul, cette quantité devant être déterminée à partir de la résolution de l'équation différentielle déduite de l'équation d'équilibre de la plaque dans des conditions de chargement spécifiques. La complexité des calculs mathématiques implique que les détails de telles résolutions seraient trop longs pour être écrits dans la littérature. Ainsi, Timoshenko fournit les formules permettant de calculer k_σ pour des cas particuliers. De même, plus tard, **Petersen** ainsi que **Klöppel** et **Sheer** ont proposé des abaques permettant de déterminer la valeur de la contrainte critique pour de nombreuses configurations de chargements, de conditions d'appuis et de formes de raidissage. Cependant, si l'on recherche à déterminer la valeur de ce coefficient pour des configurations variables de chargement ou d'appui, il faut souvent revenir à la résolution du problème de stabilité ou user d'outils numériques [YAM, 01]. De même, lorsque les conditions d'appui sont variables (maintien rotationnel élastique avec un chargement linéaire) la résolution devient très complexe [BED, 97], [BRA, 00], [PAI, 00] [SOA, 96].

Dans le cas où l'on souhaite effectuer une résolution par la méthode énergétique, l'ouvrage de Bulson [BUL, 70] donne une bonne description de la résolution de problèmes de stabilité et fournit pour quelques cas particuliers de conditions d'appui, une forme de la déformée w simple permettant d'avoir une bonne approximation des contraintes critiques. Cependant, nous pourrions constater que cette forme ne dépend pas seulement des conditions d'appui mais peut aussi varier pour différentes formes de chargement.

L'article [KAN, 05] est intéressant car il présente la résolution du problème de stabilité de plaque avec des conditions soit S-F-S-S soit S-F-S-C, qui correspondent aux cas de plaques chargées sur les deux bords opposés lesquels sont appuyés avec les deux autres bords qui sont soit Free(libre), Supported (appuyé) ou Clamped (encasté). Il donne la méthode de résolution qui est celle de Timoshenko, en intégrant l'équation d'équilibre, mais en choisissant pour la fonction $f(y)$ une série de Fourier. La résolution du système d'équation induite par les conditions aux limites (déterminant nul) permet de définir la valeur des efforts critiques en fonction du nombre de demi-ondes considérées. Un résultat intéressant est celui de l'observation des efforts critiques et modes propres pour les deux cas de chargement linéaire d'une plaque appuyée sur trois bords et libre sur le quatrième (avec soit la compression soit la traction du bord libre).

En effet, suivant que la compression due au chargement linéaire soit au niveau du bord libre ou au niveau du bord appuyé, les déformées modales et les efforts critiques sont très différents. Les mêmes résultats que ceux obtenus précédemment par Bulson et Timoshenko, pour le cas de compression du bord libre, sont observés. Cependant, l'article ne fournit pas de formule facilement exploitable en vue d'une application à un modèle de calcul analytique. Cependant, il renvoie à des ouvrages encore plus récents que Bulson (1970) : Brush and Almroth (1975) et Trahair and Bradford (1998). La méthode de résolution proposée semble être un bon compromis entre une résolution directe de l'équation d'équilibre et la méthode énergétique. Car elle permet de résoudre le problème de la plaque S-F-S-S pour n'importe quelle configuration de chargement. Enfin, les auteurs affirment

pouvoir appliquer leurs méthodes au cas d'une plaque avec les bords longitudinaux maintenus élastiquement en rotation.

Cependant, aucune formule littérale n'est proposée pour traiter le cas d'une plaque en console chargée par un diagramme linéaire de contrainte sur sa largeur. C'est pourquoi nous choisissons, sur la base de la méthode énergétique, de développer une formule capable de prédire la valeur du coefficient de contrainte critique pour le cas d'une plaque en console. L'intégration de maintien semi-rigide ne sera pas traitée dans ce travail mais peut présenter une perspective intéressante.

3.1.4. Résistance ultime des parois comprimées

L'analyse des plaques dans le domaine postcritique est très complexe (théorie non linéaire) et nécessite un volume de calcul très important [JOH, 01]. C'est pourquoi les modèles analytiques font appel à des méthodes de calculs simplifiées pour le dimensionnement. Le comportement d'une plaque mince comprimée peut se décrire en deux phases distinctes :

- Le domaine élastique, en-dessous de la charge critique, dans lequel la distribution des contraintes peut être considérée comme uniforme.
- Le domaine postcritique, au-delà de la charge critique, dans lequel on observe un cloquage progressif de la plaque et où les contraintes n'ont plus une répartition uniforme (**Figure IV-12**). Les fibres situées près des bords longitudinaux sont davantage sollicitées que les fibres médianes. La raison de cette différence résulte de la plus faible rigidité des fibres médianes qui se déplacent hors du plan alors que près des appuis, la déformation spécifique des fibres est plus grande car la déformation hors plan est maintenue. Autrement dit, un raccourcissement axial identique sur la largeur b de la plaque introduira des contraintes plus élevées au voisinage des bords longitudinaux qu'à mi-largeur (**Figure IV-12**). Seules les fibres proches des bords non chargés sont susceptibles d'atteindre la limite d'élasticité dans le domaine postcritique.

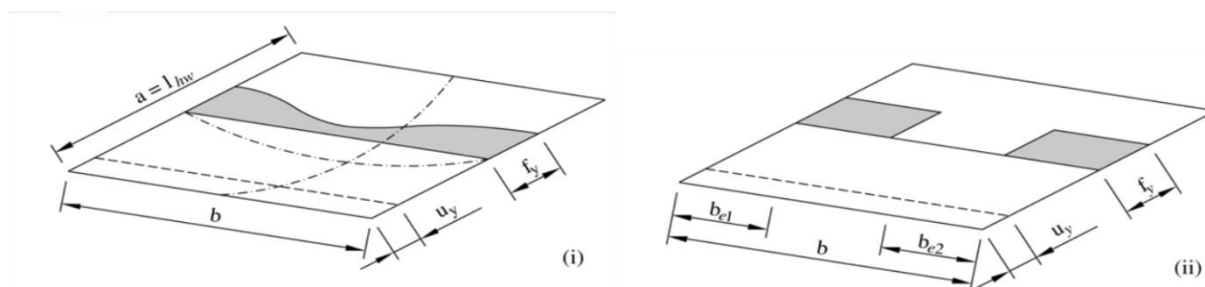


Figure IV-12 Distribution de contrainte réelle au sein d'une plaque comprimée (i) et distribution théorique uniforme de contrainte sur une largeur efficace b_{eff} (ii) [KNO, 06]

Pour le dimensionnement, on remplace le diagramme de compression non uniforme par un diagramme de compression uniforme dont la contrainte est égale à la contrainte maximale agissant sur les bords (**Figure IV-12**) répartie non plus sur toute la largeur de la plaque, mais sur une largeur efficace b_{eff} définie telle que :

$$b_{eff} = \frac{\int \sigma_x(y) dy}{\sigma_{max}} \quad \text{Equation IV-5}$$

Ainsi, la section efficace A_{eff} d'une plaque est définie comme celle qui, soumise à une compression uniforme d'intensité σ_{max} , transmettrait une réaction équivalente à la véritable section soumise à la distribution de contrainte non uniforme. L'efficacité de la plaque est donnée par le coefficient réducteur ρ_p défini comme $\rho_p = A_{eff}/A$, où $A = b.t$ est la section brute. Il revient à von Karman d'avoir introduit le concept de largeur efficace, en identifiant à la contrainte σ_{max} la contrainte critique de voilement élastique de la plaque de largeur efficace b_{eff} .

Von Karman introduit, par analogie au flambement, un élancement réduit $\bar{\lambda}_b$ défini par l'expression suivante :

$$\bar{\lambda}_b = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}}} \quad \text{Equation IV-6}$$

En général, on pose σ_{max} égale à la limite d'élasticité f_y . En effet, la ruine correspond conventionnellement à l'étape pour laquelle les fibres les plus maintenues atteignent leur limite d'élasticité, ce qui fournit une valeur sécuritaire de la largeur efficace. Cependant, la théorie de von Karman s'avère être trop favorable. En effet, cette dernière ne tient pas compte de l'existence d'imperfections géométriques initiales qui ont une influence non négligeable notamment pour les plaques ayant un élancement moyen et se situant entre les plaques courtes et les plaques très élancées ($0,5 \leq \bar{\lambda}_b \leq 1,5$). Winter a alors proposé la formule semi-empirique suivante pour le calcul de la largeur efficace d'une plaque comprimée en acier dont les bords sont simplement appuyés :

$$b_{eff} = \frac{b}{\lambda_b} \left(1 - \frac{0,22}{\lambda_b} \right) \quad \text{Equation IV-7}$$

La comparaison des différentes courbes donnant la largeur efficace en fonction de l'élancement de la paroi étudiée est donnée sur la **Figure IV-13**. Cette figure permet de constater l'écart de résultats entre la méthode de von Karman et celle de Winter. De plus il peut être constaté de manière logique que cet écart diminue avec l'élancement car, plus la plaque est élancée, moins les imperfections ont de l'influence et la courbe de Winter converge vers celle de von Karman. D'autres auteurs ont cherché à définir de nouvelles courbes de résistance ultime des plaques pour remplacer la courbe de Winter, cependant la courbe proposée n'est valable que pour des cas de plaques appuyées sur les quatre bords. De plus la courbe proposée reste relativement proche de la courbe de Winter [BEZ, 02].

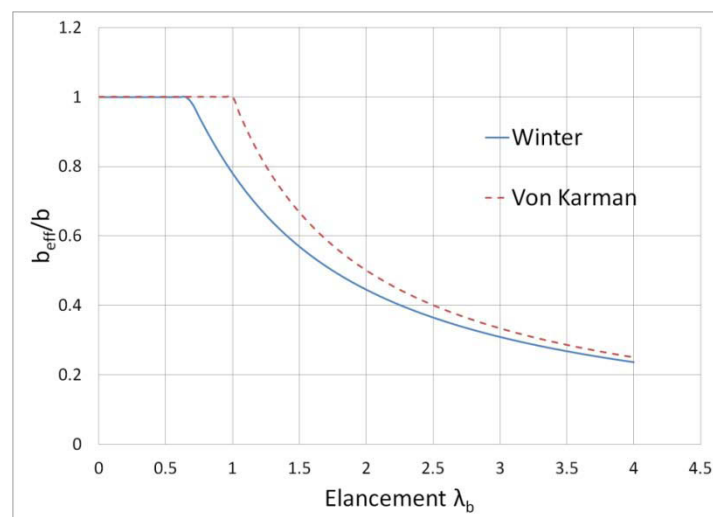


Figure IV-13 Comparaison des courbes donnant la largeur efficace en fonction de l'élancement réduit

Aujourd'hui, l'Eurocode 3 partie 1-5 permet de traiter la résistance ultime des plaques minces pour toute forme de chargement axial. Il fournit les règles majoritairement basées sur la formule de Winter et définit un élancement réduit critique à partir duquel doit être considérée une réduction de la section. Une présentation de cette partie de l'Eurocode avec plus de détails sur les backgrounds de cette norme est fournie dans les références [MAQ, 00] et [JOH, 07].

Le cas qui nous concerne est celui de l'âme des sections en T le long d'un quart d'ouverture, ce qui revient au cas du voilement de plaque avec un bord libre, traité dans l'Eurocode 3 pour l'analyse du voilement local des semelles (définies comme parois en console dans l'Eurocode). Nous avons pu voir que l'application des règles de classification fournies par l'Eurocode pour notre cas donne des résultats trop conservatifs car il ne considère ni la longueur de la plaque ni les éventuels maintiens rotationnels apportés par la liaison âme-semelle.

En effet, si on prend l'exemple d'une paroi en console, l'Eurocode fournit des formules de k_σ pour différents chargement (voir **Figure IV-14**).

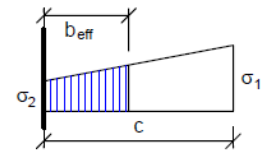
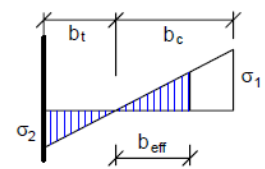
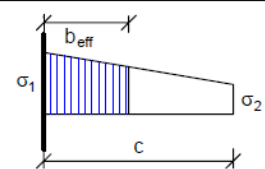
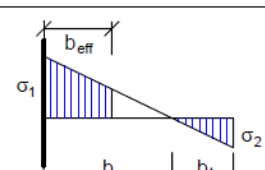
Répartition des contraintes (compression positive)		Largeur efficace ^p b_{eff}			
		$1 > \psi \geq 0$: $b_{eff} = \rho c$			
		$\psi < 0$: $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1-\psi)$			
$\psi = \sigma_2/\sigma_1$	1	0	-1	$1 \geq \psi \geq -3$	
Coefficient de voilement k_σ	0,43	0,57	0,85	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	
		$1 > \psi \geq 0$: $b_{eff} = \rho c$			
		$\psi < 0$: $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1-\psi)$			
$\psi = \sigma_2/\sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1
Coefficient de voilement k_σ	0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	23,8

Figure IV-14 Formules pour k_σ en fonction du rapport de contrainte ψ [EN3-1-5]

Nous pouvons constater sur la **Figure IV-14** que les formules donnant k_σ ne dépendent que du rapport ψ . Ainsi, pour le cas de la compression uniforme, l'Eurocode ne fournit qu'une valeur fixe $k_\sigma = 0,43$. Cependant, pour le cas d'une plaque dont le rapport $a/b = 1$, le coefficient de contrainte critique a une valeur de $k_\sigma = 1,4$ [TIM, 43]. Ainsi, la contrainte critique est multipliée par 3,25. Ce qui revient à réduire l'élancement $\bar{\lambda}_b$ d'un coefficient de $\sqrt{3,25} = 1,8$ (voir **Equation IV-6**). Finalement, cela revient à diviser presque par deux l'élancement d'une paroi en considérant simplement la seconde dimension (distance entre les appuis) dans le calcul de la contrainte critique.

Cette remarque ne remet bien évidemment pas en question la formule de Winter ni le critère de classification de l'Eurocode 3. Les formules de l'Eurocode peuvent être directement adaptées en rectifiant la valeur de l'élancement réduit, en considérant une valeur plus juste de k_σ pour les cas de plaques non-infiniment longues.

Finalement, dans le but d'améliorer les calculs de résistance ultime de plaque en console, nous choisissons de développer une nouvelle formule permettant de calculer la valeur de k_σ en fonction du système de chargement (ψ) et du rapport de longueur de la plaque α .

3.1.5. Nouveau modèle de calcul du coefficient k_σ

La littérature permet de retrouver les formules donnant la valeur du coefficient de contrainte critique k_σ en fonction du rapport a/b pour une plaque en console uniformément comprimée. [TIM-1, 13][TIM-4, 13]

Il s'agit d'étudier les valeurs fournies par Timoshenko, obtenues à partir de l'intégration de l'équation différentielle de la courbe élastique de la plaque et celles obtenues par la méthode énergétique décrites dans l'ouvrage de **Bulson** [BUL, 70]. Celui-ci fournit une formule simplifiée de k_σ pour le cas de la **plaque uniformément comprimée** :

$$k_\sigma = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{6(1-\nu)}{\pi^2} \quad \text{Equation IV-8}$$

Le **Tableau IV-3** compare les valeurs du coefficient de voilement k_σ données par la littérature [TIM, 43] avec celles déduites de la formule simplifiée fournie par **Bulson**, **Equation IV-8**:

a/b	0,5	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5
k_σ	4,40	1,44	1,135	0,952	0,835	0,755	0,698	0,61	0,564	0,516	0,506
Intégration											
k_σ Energie	4,43	1,43	1,12	0,94	0,82	0,734	0,68	0,59	0,54	0,49	0,47

Tableau IV-3 Comparaison des valeurs du coefficient de voilement k_σ entre les deux méthodes de résolution

Le **Tableau IV-3** montre que les résultats obtenus sont très similaires entre les deux méthodes. Il peut être remarqué que la valeur de k_σ est égale à 0,436 seulement pour un rapport $a/b = 10$.

Il s'agit maintenant de développer une formule de k_σ pour le cas de plaques avec un chargement linéaire quelconque. Afin de déterminer la valeur de ce coefficient, pour des configurations variables de chargement ou d'appui, il faut souvent revenir à la résolution du problème de stabilité de plaque ou user d'outils numériques. [YAM, 01]

Nous avons fait le choix d'utiliser une résolution par la méthode de l'énergie. Pour appliquer la méthode de l'énergie, il est supposé que la plaque est soumise à l'action de forces agissant dans son plan moyen et qu'elle subit une certaine flexion pour des conditions données au contour. Cette flexion limitée peut se produire sans étirement du plan moyen. Ainsi seuls l'énergie de flexion et le travail des efforts extérieurs produit par les forces agissant dans le plan moyen sont à considérer. Si ce travail a une valeur inférieure à celle de l'énergie de déformation par flexion, pour toutes les formes possibles de flambage hors plan, la forme plane d'équilibre de la plaque est stable. Si au contraire, la valeur de ce travail devient supérieure à celle de l'énergie de déformation, la forme plane d'équilibre est instable et le voilement s'initie.

Il s'agit dans un premier temps de définir la forme de la déformée qui représente au mieux la flexion de la plaque en fonction de ses conditions aux limites. Dans le cas d'une plaque en console, appuyée sur trois bords et libre sur le quatrième, la déformée s'effectue toujours en une seule demi-

onde [BUL, 70]. C'est la raison pour laquelle le diagramme de k_σ d'une plaque en console uniformément comprimée n'a qu'une seule forme (voir **Figure IV-15**). A l'inverse de la plaque appuyée, pour laquelle, est définie une courbe enveloppe car les courbes varient suivant qu'il faille considérer une ou plusieurs demi-ondes de voilement. Cette observation permet de très largement simplifier la forme de la déformée et rend la méthode énergétique d'autant plus adaptée.

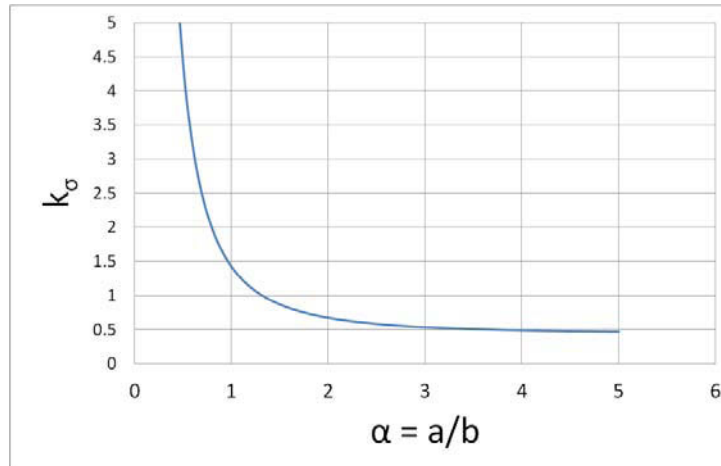


Figure IV-15 Diagramme $k_\sigma = f(a/b)$ pour une plaque en console uniformément comprimée ($\psi=1$)

« La valeur minimal de k_σ est donc toujours associée à $m = 1$, qui implique qu'une plaque, appuyée sur 3 bords et libre sur l'autre, voile toujours en une seule demi-onde indépendamment de sa longueur. La méthode de l'énergie donne une approximation très proche de la solution exacte, s'il est supposé que durant le voilement il n'y a aucune flexion transverse. Ainsi, une expression pour w satisfaisant cette hypothèse est donnée ci-après : [BUL, 70] »

$$w = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) f(y) \quad \text{Equation IV-9}$$

$f(y)$ est une fonction qui dépend des conditions aux limites des bords longitudinaux. Pour le cas d'une plaque en console appuyée et libre sur chacun des deux bords longitudinaux, il peut être défini suivant la littérature, une forme de déformée simplifiée telle que $f(y) = y/b$.

Ceci revient à considérer une déformée de plaque :

$$w = A \frac{y}{b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \text{Equation IV-10}$$

La **Figure IV-16** ci-dessous présente une plaque appuyée sur trois bords et libre sur un bord longitudinal.

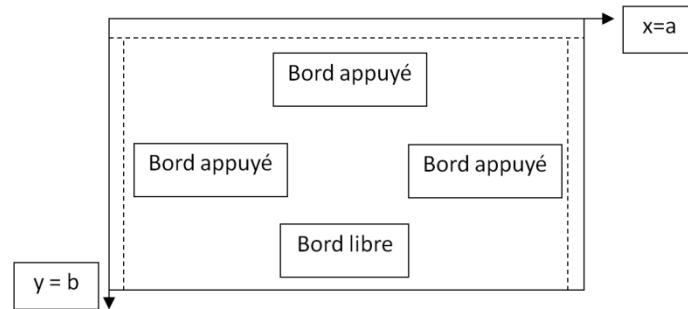


Figure IV-16 Modèle de plaque avec un bord libre

Cette plaque est soumise à un chargement linéaire de contrainte sur les bords $x = 0$ et $x = a$ tel que $\sigma_{\min} = \psi \cdot \sigma_{\max}$ [EN3-1-5]. En considérant σ positive en compression, l'amplitude de la contrainte σ à une distance y depuis le bord supérieur ($y = 0$) peut être exprimée par les relations linéaires suivant les configurations présentées à la **Figure IV-17** :

- σ_{\max} est au niveau du bord libre ($y = b$):

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \left[\psi + \frac{(1 - \psi)}{b} \cdot y \right] \quad \text{Equation IV-11}$$

- σ_{\max} est au niveau du bord appuyé ($y = 0$) :

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \left[1 + \frac{(\psi - 1)}{b} \cdot y \right] \quad \text{Equation IV-12}$$

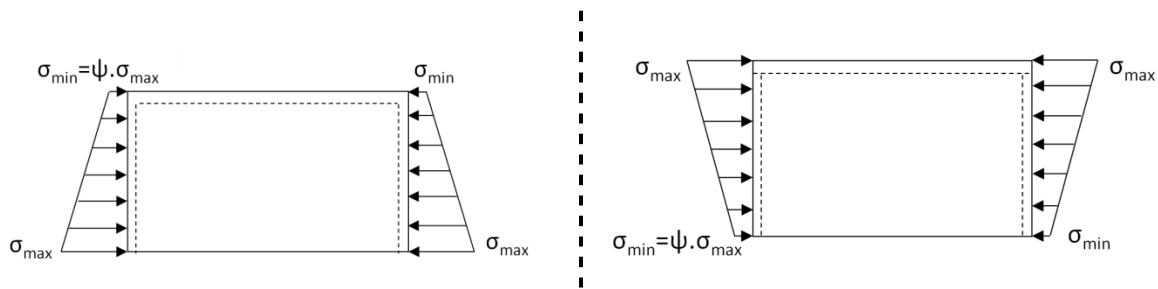


Figure IV-17 Modèle de plaque chargée linéairement avec une contrainte maximale au niveau du bord libre (à gauche) et au niveau de l'appui (à droite)

$\psi = 1$ correspond à la compression uniforme et $\psi = -1$ correspond à la flexion pure. Notre cas se situera souvent entre -1 et 1. Deux cas sont donc étudiés, celui de la compression maximale au niveau de l'appui et celui de la compression maximale au niveau du bord libre. Les deux

configurations de chargement présentées précédemment doivent être traitées de manière distincte car elles ont une fonction de chargement différente.

3.1.5.1. σ_{\max} est au niveau du bord libre ($y = b$)

L'énergie interne de flexion est définie par l'Equation IV-13 telle que : [TIM, 43]

$$U = \frac{D}{2} \iint_{00}^{ab} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad \text{Equation IV-13}$$

Avec :

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

Il a été présenté au §3.15 que la déformée supposée de la plaque décrite dans la Figure IV-17 peut être admise comme étant [BUL, 70]:

$$w = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{y}{b}$$

Ainsi, l'énergie interne de flexion peut s'écrire:

$$U = \frac{1}{12} \cdot \frac{D \cdot A^2 \cdot \pi^2 \cdot (-6 \cdot a^2 \cdot \nu + 6 \cdot a^2 + \pi^2 \cdot b^2)}{a^3 \cdot b}$$

Le travail des efforts extérieurs est défini par l'Equation IV-14 : [TIM, 43]

$$T = \frac{\sigma_{\max} t}{2} \iint_{00}^{ab} \left(\psi + \left(1 - \psi\right) \frac{y}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad \text{Equation IV-14}$$

Ainsi, en introduisant la forme de la déformée supposée, la forme du travail des efforts extérieurs devient :

$$T = \frac{1}{48} \cdot \frac{\sigma_{\max} \cdot t \cdot \pi^2 \cdot b \cdot A^2 \cdot (3 + \psi)}{a}$$

Finalement nous obtenons:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{\max, cr} = 4 \cdot D \cdot \frac{(-6 \cdot a^2 \cdot \nu + 6 \cdot a^2 + \pi^2 \cdot b^2)}{t \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot (3 + \psi)}$$

La formulation du coefficient k_σ s'obtient en comparant cette contrainte à la contrainte d'Euler telle que :

$$\sigma_{cr} = k_\sigma \cdot \sigma_E$$

Avec :

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot (t/b)^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

Nous obtenons la valeur de k_σ en fonction du rapport de contrainte ψ et en fonction des dimensions a et b de la plaque tel que:

$$k_\sigma = 4 \cdot \frac{(-6 \cdot \nu \cdot a^2 + 6 \cdot a^2 + \pi^2 \cdot b^2)}{a^2 \cdot (3 + \psi) \cdot \pi^2} \quad \text{Equation IV-15}$$

Nous remarquons que la valeur du coefficient k_σ n'est plus définie pour un rapport de contrainte $\psi < -3$. Dans ce cas, il faut alors limiter la valeur de k_σ en considérant un rapport de contrainte minimal de -3. En effet, un modèle de plaque, avec un rapport de contrainte $\psi < -3$ et une longueur suffisante, entraîne un comportement différent avec un voilement en plusieurs demi-ondes (voir l'exemple de la **Figure IV-18**). Ainsi, le modèle n'est donc plus adapté pour ce cas.

L'utilisation de ce modèle est limitée à un rapport de contrainte minimal de -3. Cependant il faut rappeler que $\psi = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$. Ainsi, dans le cas où $\psi = -3$, cela revient à considérer une contrainte de traction trois fois plus élevée que la contrainte de compression, ce qui n'est que très rarement le cas dans les sections soumises à instabilité autour d'une ouverture. Par conséquent, dans ces cas exceptionnels, revenir aux critères de l'Eurocode entraîne tout de même des contraintes critiques assez élevées, du fait que la partie comprimée de la plaque est faible.

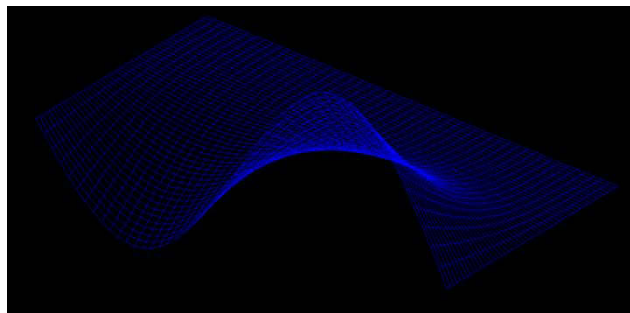


Figure IV-18 Illustration d'un voilement en deux demi-ondes pour un rapport $\psi = -4$

3.1.5.2. σ_{\max} est au niveau du bord appuyé ($y = 0$)

La compression maximale est au niveau de l'appui. Ce cas est donc moins défavorable que le précédent. Cependant, l'évolution du chargement n'étant pas la même sur la largeur b, nous devons développer un nouveau modèle pour cet autre cas de chargement.

$$\sigma = \sigma_{max} \cdot \left[1 + (\psi - 1) \cdot \frac{y}{b} \right]$$

L'énergie interne de flexion reste inchangée car la forme de la déformée est supposée identique. Seul le travail des efforts extérieurs change :

$$T = \frac{\sigma_{max} t}{2} \iint_{00}^{ab} \left(1 + (\psi - 1) \cdot \frac{y}{b} \right) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad \text{Equation IV-16}$$

Ainsi, en introduisant la forme de la déformée, on obtient :

$$T = \frac{1}{48} \cdot \frac{\sigma_{max} \cdot t \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot b \cdot (3 \cdot \psi + 1)}{a}$$

Nous pouvons en déduire la contrainte critique :

$$\sigma_{cr} = 4 \cdot D \cdot \frac{(-6 \cdot a^2 \cdot \nu + 6 \cdot a^2 + \pi^2 \cdot b^2)}{t \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot (3 \cdot \psi + 1)}$$

Ainsi, le coefficient k_σ est défini par :

$$k_\sigma = 4 \cdot \frac{(-6 \cdot \nu \cdot a^2 + 6 \cdot a^2 + \pi^2 \cdot b^2)}{a^2 \cdot (3 \cdot \psi + 1) \cdot \pi^2} \quad \text{Equation IV-17}$$

Il peut être noté que les deux cas de chargement linéaire étudiés donnent le même résultat pour une valeur de $\psi = 1$, qui correspond à une compression uniforme. De même, ce modèle de k_σ n'est plus valable pour des rapports $\psi < -1/3$. En effet, en dessous de cette valeur, le modèle donne une valeur aberrante de k_σ qui serait négative.

De la même façon que précédemment, ce problème vient de la mauvaise approximation de la déformée car pour ces rapports de contrainte, la déformée peut s'établir en plusieurs demi-ondes. De la même façon que précédemment, un rapport négatif dans ce cas correspond simplement à la traction des fibres en bord libre. Cela tend à être d'autant plus favorable que la partie comprimée est faible et que cette partie concerne les fibres au niveau de l'appui et non celles au niveau du bord libre.

3.1.6. Validation du modèle analytique

La précision du modèle analytique est évaluée par comparaison avec des calculs éléments finis sur CAST3M. Nous réalisons une première analyse de l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la précision du modèle théorique par rapport au modèle MEF pour une solution connue de plaque appuyée uniformément comprimée. Cette étude a pour objectif de justifier de l'épaisseur des

plaques utilisée pour les études comparatives suivantes visant à valider le modèle que nous avons développé.

Les résultats des comparaisons de k_σ pour différentes formes de chargement entre le modèle MEF, l'Eurocode et le modèle que nous avons développé sont présentés ci-après.

3.1.6.1. Etude de l'influence de l'épaisseur de plaque sur les écarts théorie/MEF

L'influence de l'épaisseur de la plaque sur la précision du modèle théorique de voilement de plaque par rapport aux éléments finis est évaluée. La contrainte critique d'Euler est fonction de l'épaisseur ; cependant, ce n'est plus le cas pour le coefficient k_σ . En effet, si on considère une plaque appuyée sur ses 4 bords avec un rapport de dimensions $a/b = 1$, la théorie donne $k_\sigma = 4$ indépendamment de l'épaisseur de la plaque. Cette approximation a une incidence directe sur la précision du calcul théorique par rapport à celui aux éléments finis, comme en témoignent les résultats montrés sur la **Figure IV-19**.

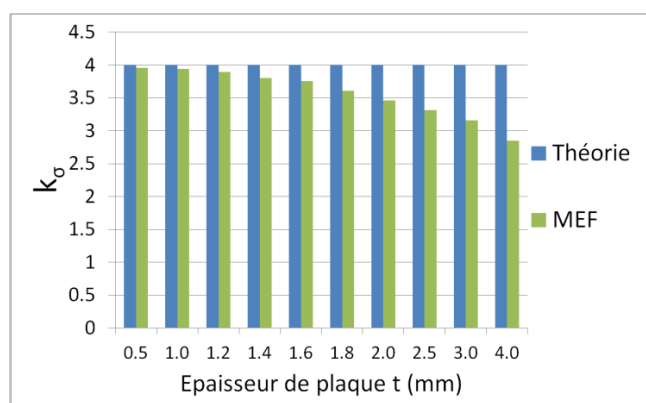


Figure IV-19 Comparaison des valeurs de k_σ théoriques et numériques en fonction de l'épaisseur de la plaque t (mm) avec $a = b = 200\text{mm}$

Il apparaît que l'épaisseur de la plaque influe sur la valeur du coefficient k_σ . La **Figure IV-19** permet de vérifier que les écarts entre le modèle théorique et le modèle MEF sont faibles pour les cas de plaques minces. En revanche, pour des plaques plus épaisses, le modèle théorique apparaît bien moins adapté notamment pour des épaisseurs de plaque supérieures au dixième de sa longueur (ou largeur).

Afin de s'affranchir de toute influence de l'épaisseur sur les résultats, nous avons choisi de conserver un rapport de 100 entre l'épaisseur et la largeur de la plaque dans le but de rester dans les hypothèses de plaque mince ($a = b = 100t$).

Dans ce qui suit, les valeurs données par les formules analytiques de calcul du coefficient de voilement k_σ sont comparées avec celles données par le modèle MEF. La comparaison est réalisée pour différents cas de chargement qui concernent la compression uniforme ($\psi = 1$), la flexion pure

($\psi = -1$) et la flexion composée ($\psi = 0$). Les deux configurations de chargement, contrainte maximale de compression en bord libre ou au niveau de l'appui sont étudiées.

3.1.6.2. σ_{\max} au niveau du bord libre, $y = b$

a. Compression uniforme ($\psi = 1$)

Il s'agit de comparer les valeurs de contraintes critiques obtenues numériquement (MEF) avec celles données par les formules analytiques de Bulson (**Equation IV-8**), de l'Eurocode 3 (**Figure IV-14**) et de la présente étude (**Equation IV-15**). Comme le cas étudié ici concerne la compression uniforme, la formule proposée par Bulson peut être appliquée.

La **Figure IV-20** montre que le modèle analytique proposé dans cette étude, appelé Modèle, donne des valeurs de contraintes critiques très proches de celles de la MEF pour différentes géométries de plaque. De plus, la comparaison montre que les valeurs données par la formule de l'Eurocode sont très conservatives sur l'ensemble des valeurs de a/b considérées avec les écarts les plus importants pour les faibles valeurs de a/b .

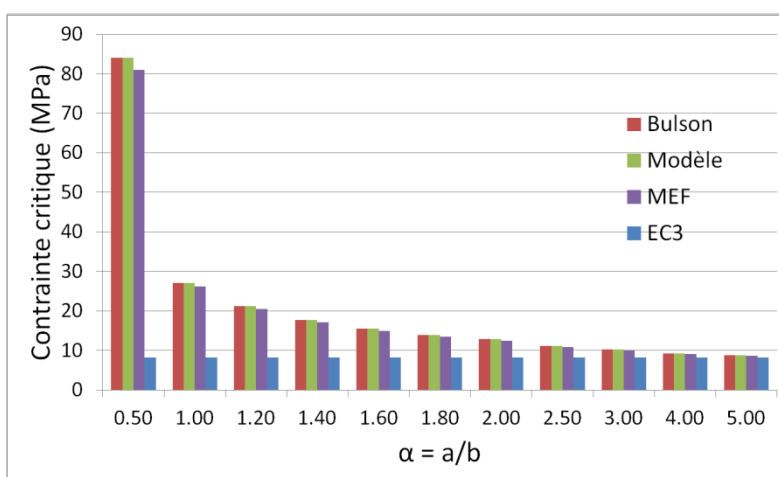


Figure IV-20 Comparaison des valeurs de σ_{cr} pour les différents modèles pour $\psi=1$

b. Flexion pure ($\psi = -1$)

De la même façon qu'en compression, la **Figure IV-21** compare les contraintes critiques obtenues, en flexion pure, par le modèle analytique développé, avec les formules de l'Eurocode et le modèle MEF.

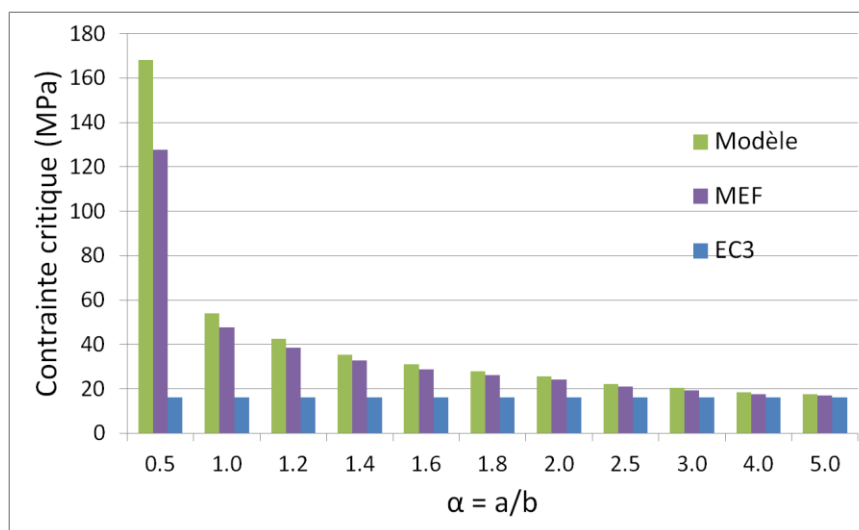


Figure IV-21 Comparaison des valeurs de σ_{cr} pour les différents modèles pour $\psi = -1$

Nous observons que le modèle analytique donne des résultats assez proches du modèle MEF. Encore une fois, cette comparaison montre que la contrainte critique fournie par l'Eurocode est plutôt adaptée pour des plaques dont le rapport a/b est plus grand que 4. Pour les faibles rapports a/b , la contrainte critique est largement sous-estimée par l'EC3.

c. Flexion composée : $\psi = 0$

La **Figure IV-22** montre les contraintes critiques, d'une plaque en flexion composée, calculées par le modèle analytique que nous proposons, le modèle MEF et les formules de l'Eurocode (EC3). Les mêmes observations que pour la compression ou la flexion pure peuvent être formulées ici.

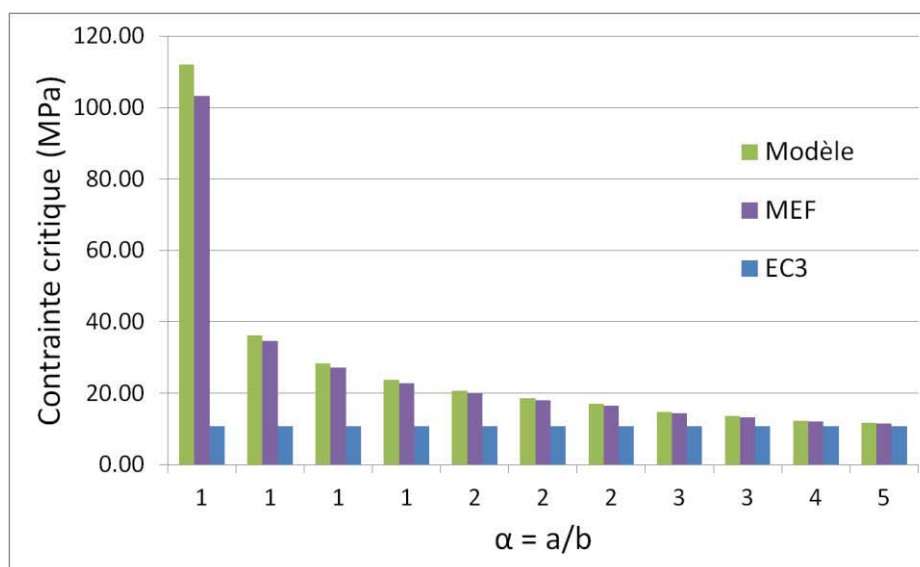


Figure IV-22 Comparaison des valeurs de σ_{cr} pour les différents modèles pour $\psi = 0$

Les résultats obtenus par éléments finis montrent que même pour un rapport a/b élevé, la plaque conserve un premier mode de voilement en une seule demi-onde (**Figure IV-23**). Ceci permet de confirmer l'allure du graphe k_0 en fonction de a/b donné **Figure IV-15**.

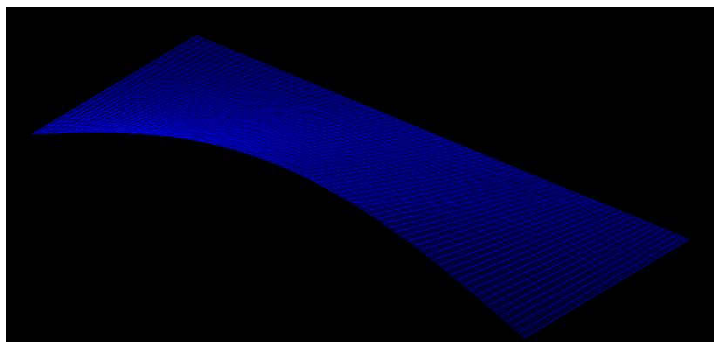


Figure IV-23 Premier mode de voilement pour une plaque de rapport $a/b = 2,5$

3.1.6.3. σ_{\max} au niveau du bord appuyé, $y = 0$

L'étude d'une plaque à bord libre uniformément comprimée ($\psi = 1$) permet de vérifier que pour $a/b = 1$, la valeur déduite analytiquement de $k_0 = 1,43$ est identique à la valeur obtenue par le modèle de Bulson (voir **Figure IV-20**). Nous allons maintenant comparer les valeurs des contraintes critiques obtenues par le modèle analytique avec celles du modèle numérique pour différents cas de sollicitations.

a. Flexion composée ($\psi = 0$)

Pour une distribution linéaire de chargement et une contrainte maximale sur le bord appuyé, la **Figure IV-24** montre qu'en comparaison avec l'EC3, le modèle analytique développé donne des valeurs de contraintes critiques plus précises. Les écarts diminuent avec l'augmentation du rapport a/b . Cette évolution de l'écart est directement liée à l'erreur relative de déformée approximée par rapport à la déformée réelle, erreur qui s'amenuise avec l'augmentation de la longueur de la plaque.

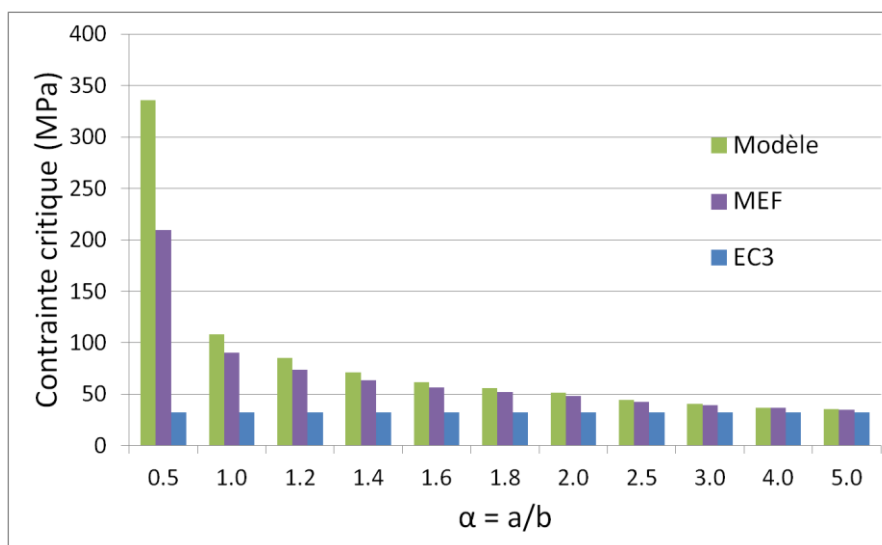


Figure IV-24 Comparaison des valeurs de σ_{cr} pour les différents modèles pour $\psi = 0$

b. Flexion composée : $\psi = 0,5$

La **Figure IV-25** montre que le modèle analytique donne des résultats relativement proches du modèle MEF. Les résultats MEF ont confirmé que même pour un rapport a/b élevé, la plaque conserve un premier mode de voilement en une seule demi-onde. Plus la plaque est longue et plus l'approximation faite sur la forme de la déformée est correcte, ce qui implique des écarts entre les calculs MEF et analytique plus faibles.

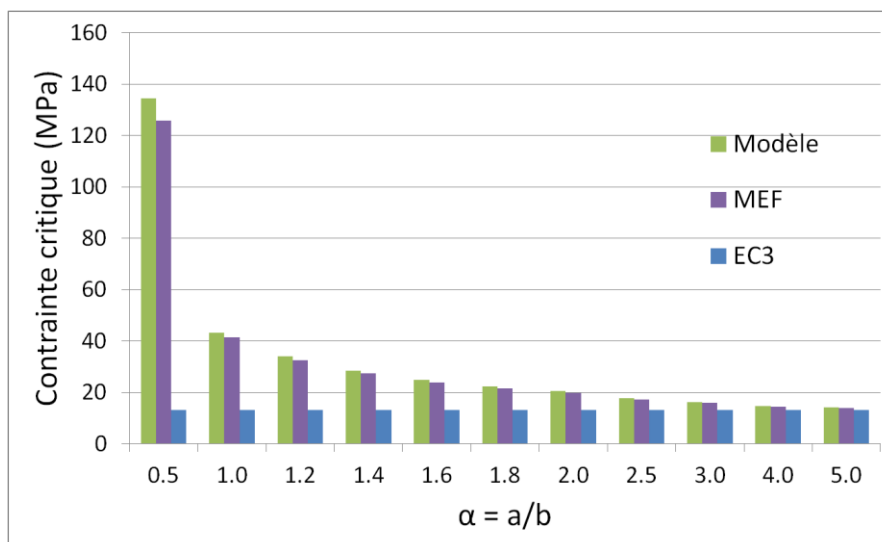


Figure IV-25 Comparaison des valeurs de σ_{cr} pour les différents modèles pour $\psi = 0,5$

c. Flexion pure ($\psi = -1$)

En flexion pure, la moitié de la largeur b de la plaque, à partir du bord libre, est en traction. Il peut être observé que pour un rapport $a/b = 0,5$, la déformée modale est similaire à celle d'une plaque appuyée sur quatre bords et non à celle d'une plaque à bord libre (**Figure IV-26**), comme il a pu être aussi observé sur l'article [KAN, 05]. Le fait d'avoir de la traction sur le bord libre influe beaucoup sur la forme de la déformée.

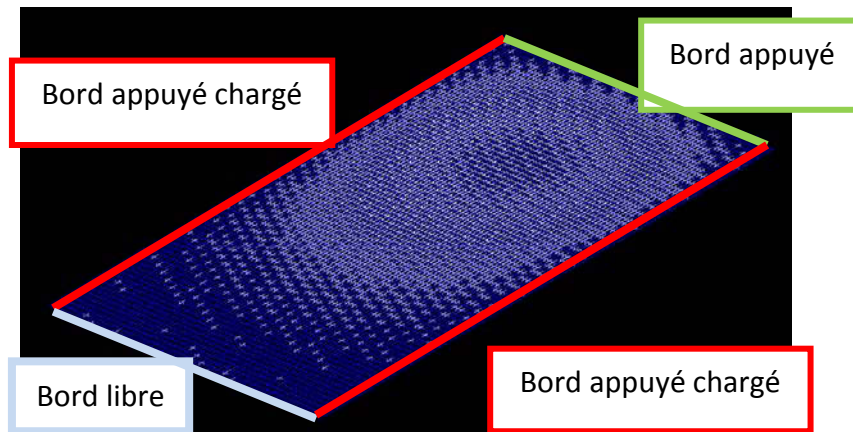


Figure IV-26 Premier mode de voilement pour une plaque de rapport $a/b = 0,5$

De plus, pour un rapport $a/b > 0,5$, la plaque voile avec plus d'une seule demi-onde. A l'identique d'une plaque appuyée, le nombre de demi-ondes de voilement qui donne la contrainte critique minimale augmente en fonction du rapport a/b et la plaque voile en ondes carrées comme illustré à la **Figure IV-27**.

Avec cette configuration de chargement, l'approximation faite d'une déformée en une seule demi-onde n'est plus aussi juste. En effet, dans ce cas, la contrainte critique de voilement dépend de la longueur d'onde de voilement. Par conséquent le coefficient de contrainte critique k_σ , fonction du rapport a/b , n'évolue plus suivant une seule fonction décroissante mais suit différentes fonctions suivant le mode de voilement comme illustré à la **Figure IV-10** pour une plaque appuyée sur 4 bords (la fonction à considérer est toujours celle donnant la contrainte critique minimale).

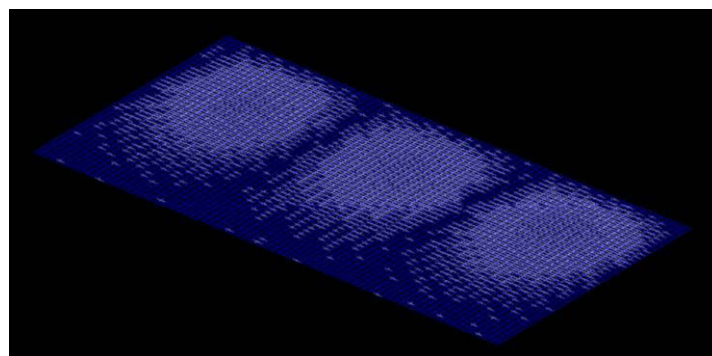


Figure IV-27 Premier mode de voilement pour une plaque ayant un rapport $a/b = 2$

Les résultats du modèle analytique développé ne concordent pas avec les résultats numériques. Ces écarts sont dus à la mauvaise représentativité de la forme de déformée. Il n'est donc pas utile de les présenter.

L'article [KAN, 05] donne des résultats similaires en expliquant que les contraintes de traction du bord libre doivent stabiliser les fibres en bord libre justifiant ainsi ce changement de comportement. Mais il ne donne pas de règle de calcul.

A partir des résultats du modèle MEF et de l'analyse théorique des résultats, une approche réservée à ce cas de chargement est proposée afin d'obtenir des résultats analytiques les plus proches possibles des résultats MEF. En comparant les résultats numériques obtenus pour une plaque appuyée sur 4 bords avec ceux d'une plaque avec un bord libre (dont les fibres sont tendues), il peut effectivement être observé une forte similitude en terme de déformée modale (voir **Figure IV-28**) mais aussi en terme d'effort critique. Les deux plaques sont chargées par des contraintes de compression de rapport $\psi = -1$ (flexion) avec le bord libre de la seconde plaque tendu.

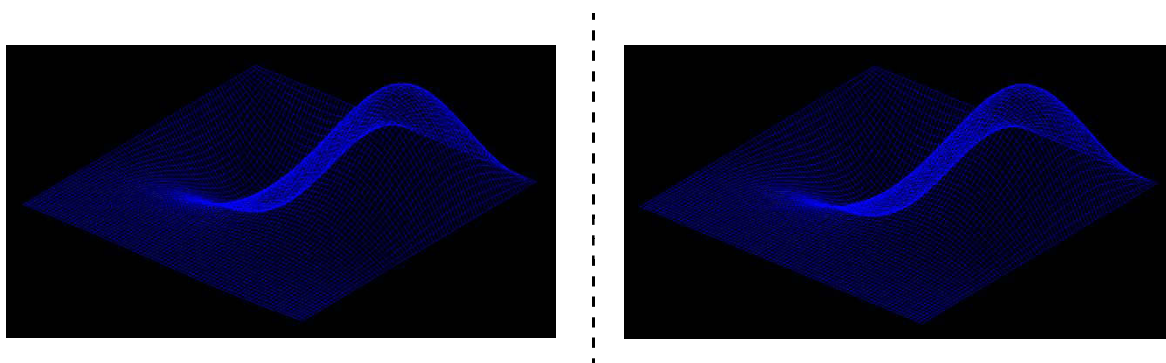


Figure IV-28 Déformée modale d'une plaque à bord libre (gauche) et appuyée (droite) avec $\psi = -1$ et $a/b = 1$

La **Figure IV-29** compare les valeurs de contrainte critique obtenues à l'aide du modèle MEF de plaque appuyée (appuyée sur 4 bords), de plaque en console (appuyée sur 3 bords et libre sur l'autre) et la valeur de contrainte critique obtenue par la formule de l'Eurocode pour une plaque en console chargée avec un rapport de contrainte $\psi = -1$. On peut noter que l'Eurocode donne une valeur de coefficient de contrainte critique identique au cas de plaque appuyée, $k_o = 23,8$ (23,9 pour une plaque appuyée).

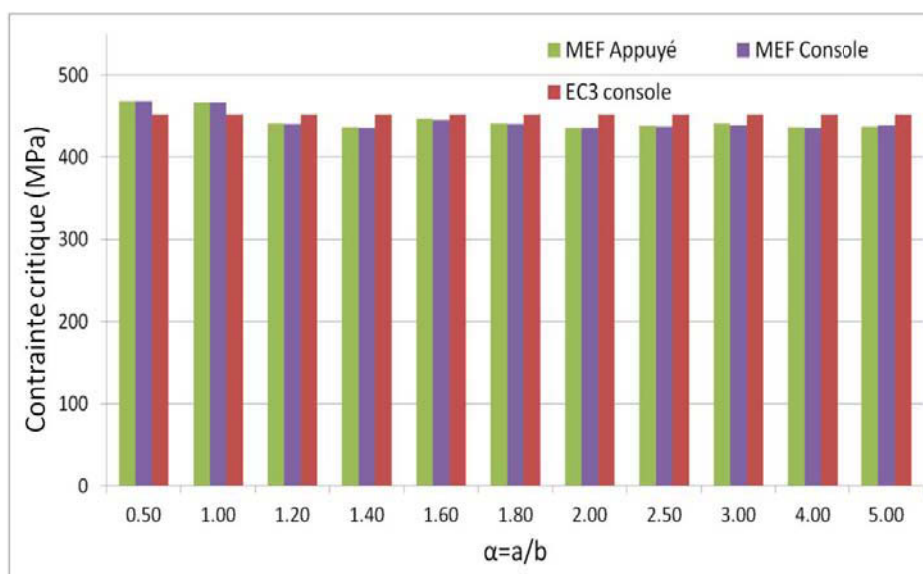


Figure IV-29 Comparaison des valeurs de σ_{cr} pour les différents modèles pour $\psi = -1$

La Figure IV-29 montre que les valeurs de charges critiques MEF pour le modèle de plaque appuyée sur 4 bords sont similaires avec celles d'une même plaque avec un bord libre. **Cette similitude peut servir à résoudre le problème d'une plaque appuyée sur trois bords et dont le bord libre est tendu en considérant le cas similaire d'une plaque appuyée sur 4 bords.** Cette observation permet de confirmer la cohérence de la valeur de k_σ fournie par l'Eurocode pour le cas particulier de $\psi = -1$.

Cependant il serait intéressant de vérifier si cette hypothèse est valable pour un diagramme de flexion composée avec une zone tendue moins étendue que dans le cas de la flexion simple. Par exemple, l'étude d'un cas limite : $\psi = -0,1$ donne :

- plaque appuyée sur 4 bords, $a/b = 1,4$: $\sigma_{cr} = 177,12$ MPa. On observe 2 demi-ondes de voilement,
- plaque en console, $a/b = 1,4$: $\sigma_{cr} = 83,86$ MPa. On observe 1 demi-onde de voilement.

Cet exemple permet de montrer que **pour un rapport de contrainte $\psi = -0,1$ qui correspond à une faible zone de traction du bord libre, l'hypothèse d'un comportement de plaque similaire à une plaque appuyée sur 4 bords n'est pas justifiée.** Le mode de voilement de la plaque en console est, dans le cas de $\psi = -0,1$, plus proche de celui proposé analytiquement par la formule :

$$w = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{y}{b}$$

Par conséquent, **nous proposons de définir un critère à partir duquel il est possible de considérer un comportement similaire à celui d'une plaque appuyée sur 4 bords.** La première hypothèse est que ce critère est principalement basé sur le rapport de contrainte ψ . Pour les cas de plaque respectant ce critère, le calcul de la contrainte critique devrait alors se baser sur une nouvelle

forme de déformée w . Ainsi considérer la déformée d'une plaque sur 4 bords peut s'approximer par : **[TIM, 43]**

$$w = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

La méthode énergétique permet de trouver l'expression du coefficient de contrainte critique k_σ qui est:

$$k_\sigma = \frac{2(b^4 + 2a^2b^2 + a^4)}{a^2b^2(1 + \psi)} \quad \text{Equation IV-18}$$

Il peut être noté que pour le cas $\psi = -1$, de la flexion simple, l'**Equation IV-18** n'a pas de solution. Timoshenko arrive au même problème, inhérent à l'approximation faite sur la forme de la déformée w qui considère un produit de deux fonction sinus avec les seuls coefficients de forme d'une demi-onde dans les deux directions : (citation de Timoshenko **[TIM, 43]**)

« Cette première approximation ne donne un résultat satisfaisant que pour des petites valeurs de ψ , c'est-à-dire dans les cas où les contraintes de flexion sont faibles par rapport aux contraintes de compression.[...] Pour avoir une deuxième approximation on doit prendre deux équations du système avec les coefficients a_{11} et a_{12} (ce qui revient à considérer un deuxième coefficient en plus de A dans la forme de déformée) et la résolution du système d'équation induit l'équation ci-dessous :

$$\left(\frac{\sigma_{cr} \cdot a^2 \cdot t}{\pi^2 \cdot D}\right)^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 - \left(\frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \cdot \frac{2}{9}\right)^2\right] - \frac{\sigma_{cr} \cdot a^2 \cdot t}{\pi^2 \cdot D} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \cdot \left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \left(1 + 4 \cdot \frac{a^2}{b^2}\right)^2\right] + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{a^2}{b^2}\right)^2 = 0. \quad \text{Equation IV-19}$$

Avec :

$$N_x = N_0 \left(1 - \frac{\rho \cdot y}{b}\right) \text{ et } \sigma_{cr} = \frac{(N_0)_{cr}}{t}$$

- N_x : intensité de l'effort de compression sur la largeur b de la plaque à une ordonnée y
- ρ : facteur numérique
- N_0 : intensité de la force de compression sur le côté $y = 0$
- t : épaisseur de la plaque

L'**Equation IV-19** permet de calculer la deuxième approximation de σ_{cr} . L'exactitude de l'approximation diminue à mesure que ρ décroît. Ainsi, en flexion simple ($\rho = 2$), pour une plaque carrée ($a = b$), l'erreur est d'environ 8% de sorte qu'il est nécessaire de calculer une valeur encore plus approchée pour obtenir une exactitude plus grande... » (Citation de Timoshenko **[TIM, 43]** (page 341))

La résolution de l'**Equation IV-19** permet de proposer une formule de σ_{cr} pour le cas d'une plaque appuyée sur ses 4 bords et chargée de manière linéaire. Cependant, la formule de la contrainte critique obtenue après résolution est relativement lourde. La comparaison entre les valeurs théoriques fournies par la résolution de l'équation de Timoshenko (**Equation IV-19**) et celles déduites de l'Eurocode permet d'estimer la pertinence de la simplification de l'Eurocode.

Cette résolution directe de l'**Equation IV-19** permet de caractériser seulement la première courbe de coefficient de contrainte critique correspondant à un voilement en une seule demi-onde. Les autres courbes doivent être déduites de la première par translation. Cependant, le problème se complexifie si l'on souhaite fournir une formule générale donnant la contrainte critique en fonction du rapport de contrainte et du rapport a/b car cela nécessiterait de connaître l'équation de la courbe enveloppe pour chaque rapport de contrainte ψ . Les valeurs fournies par la formule de l'Eurocode sont développées pour des cas de plaques de longueur infinie. Elles sont donc mal adaptées pour les plaques courtes ($a/b < 1$).

Le **Tableau IV-4** compare les valeurs de contrainte critique pour de faibles rapports a/b ; intervalle sur lequel la valeur de la contrainte critique fournie par la résolution de l'équation de Timoshenko peut être directement utilisée⁹. La première colonne de ce tableau donne le rapport de contrainte sollicitante ; entre parenthèses est donnée la valeur du rapport ρ correspondant pour la formule de Timoshenko (**Equation IV-19**). Ensuite, la seconde colonne donne le rapport de forme $\alpha = a/b$ qui est limité par le mode de ruine avec une seule demi-onde. Enfin les colonnes 3 et 4 donnent les résultats analytiques de contraintes critiques obtenues par la formule de Timoshenko $\sigma_{cr, TIM}$ (résolution de l'**Equation IV-19**) et par la formule de l'Eurocode $\sigma_{cr, EC3}$.

ψ (ρ)	$\alpha=a/b$	$\sigma_{cr, TIM}$	$\sigma_{cr, EC3}$	Ecart $\sigma_{cr, TIM} / \sigma_{cr, EC3}$
0 (1)	0,2	828	148	5,59
0	0,5	221	148	1,49
0	1	148	148	1,00
-1 (2)	0,2	1589	453	3,50
-1	0,5	527	453	1,16
-1	0,7	474	453	1,05
-2 (3)	0,2	14255	1022	13,96
-2	0,5	5191	1022	5,08
-2	0,6	5041	1022	4,94
-0,5 (1,5)	0,2	1094	254	4,30
-0,5	0,5	330	254	1,30
-0,5	0,9	254	254	1,00

Tableau IV-4 Comparaison des contraintes critiques entre théorie (Timoshenko) et Norme (EC3) pour une plaque appuyée

⁹ Dans le tableau, la valeur maximale de a/b utilisée pour chaque cas correspond à la valeur maximale pour laquelle on a la valeur minimale de σ_{cr} . Pour des valeurs de ce rapport supérieur, on se situe sur la partie croissante de la courbe k_{σ} (a/b).

Le **Tableau IV-4** montre que suivant le diagramme de contrainte sollicitante, la valeur limite du rapport $\alpha = a/b$, pour lequel la plaque conserve une déformée modale en une seule demi-onde, n'est pas la même et il peut s'avérer inférieur à 1. De plus il peut être constaté sur ce même tableau que les formules de l'Eurocode sont très conservatives pour des rapports a/b inférieurs à 0,5. L'adaptation de ces calculs aux sections d'un quart d'ouverture sera donnée plus tard dans cette partie.

Pour les vérifications des sections du quart d'ouverture proches du montant d'âme pleine ($a/b < 0,5$), il est préférable d'utiliser le calcul réel de k_σ à partir de l'équation fournie par Timoshenko (**Equation IV-19**) afin de tenir compte de la proximité de ces sections avec la ligne d'appui. Les détails du nouveau modèle de vérification de résistance des sections d'un quart d'ouverture seront décrites ultérieurement. Cependant, il peut être constaté que les formules fournies par l'Eurocode donnent rapidement des résultats très concordants avec Timoshenko pour des rapports de dimension de plaque supérieurs à 0,7. La première simplification qui consiste à considérer les formules de l'Eurocode dans ce cas de chargement, peut s'avérer une démarche conservative et relativement réaliste.

Dans ce qui suit, nous vérifions si l'approximation, qui consiste à assimiler la plaque avec un bord libre tendu à une plaque appuyée sur 4 bords, est réaliste.

3.1.7. Critère d'équivalence pour la plaque avec bord libre

Dans le but de définir l'équivalence entre une plaque en console et une plaque appuyée, nous proposons d'établir un critère qui définit les limites de validité. Nous avons montré précédemment que ce critère est surtout fonction du rapport de contraintes sollicitantes ψ . En effet, pour une valeur négative de ce rapport, le mode de ruine peut changer en passant d'une forme caractéristique d'une plaque en console (déformée maximale hors plan au niveau des fibres en bord libre) à celle d'une plaque appuyée sur 4 bords (déformée maximale hors plan au niveau des fibres du milieu de la plaque). Il s'agit de déterminer à partir de quelle valeur de ce rapport ψ le changement de mode s'opère.

Dans le cas d'un chargement avec $\Psi = -0,3$ et une configuration de plaque telle que $a/b = 1,8$, le mode de ruine entre les deux modèles diffère (**Figure IV-30**). En effet, les modes de voilement et les contraintes critiques sont différents, et la plaque en console est bien moins rigide.

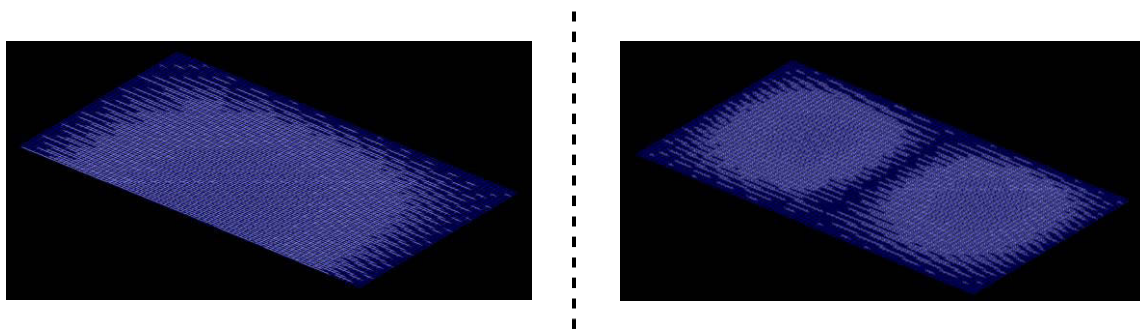


Figure IV-30 Premier mode pour une plaque en console (à gauche) et appuyée (à droite) avec $\Psi = -0,3$

Pour le cas $\psi = -0,4$, les modes de ruines sont plus proches et un changement de mode pour la plaque en console s'opère avec une déformée modale proche de celle de la plaque appuyée (voir **Figure IV-31**).

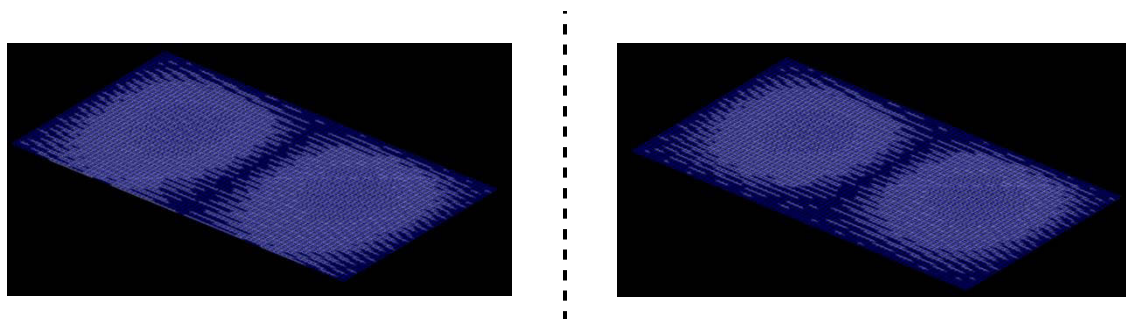


Figure IV-31 Premier mode de voilement pour la plaque en console (à gauche) et appuyée (à droite) avec $\psi = -0,4$

Nous menons une étude paramétrique sur les dimensions de la plaque (rapport a/b) afin de vérifier que la valeur de $\psi = -0,4$ peut être considérée comme une valeur limite à partir de laquelle la plaque en console peut toujours être considérée comme appuyée sur 4 bords. Le détail de cette étude paramétrique est fourni en **Annexe D**.

Le bilan de cette étude nous permet de considérer qu'**une plaque en console**, chargée avec un diagramme linéaire de contraintes axiales, avec la contrainte de compression maximale au niveau de l'appui, **peut être considérée comme une plaque appuyée sur ses quatre bords dès lors que le rapport de contrainte ψ est négatif** (bord libre tendu) **et inférieur ou égal à -0,4**. Pour des valeurs de $\psi > -0,4$, les écarts de charges critiques entre les deux modèles deviennent importants à cause de la différence des modes de ruine.

La comparaison des contraintes critiques obtenues numériquement et celles données par l'Eurocode 3 pour une plaque en console permet de voir que la norme reste très conservative. Ainsi, comme il a été constaté qu'à partir d'un rapport $\psi < -0,4$, la plaque se comporte de manière similaire (modes de voilement et efforts critiques) à une plaque appuyée, il est proposé d'utiliser les résultats de cette dernière.

La première comparaison faite entre l'**Equation IV-19** et celle de l'Eurocode a montré que la formule de l'Eurocode définit une contrainte critique de plaque appuyée conservative par rapport à la formule de Timoshenko ; ce qui est logique, étant donné qu'elle donne la valeur minimale du coefficient k_0 indépendamment du rapport a/b . Cependant la résolution de l'équation de Timoshenko donne une formule relativement lourde de la contrainte critique. De plus celle-ci permet seulement de définir la courbe pour un voilement en une seule demi-onde. Ainsi, la résolution de cette équation ne permet pas de traiter tous les cas de plaque mais seulement les cas de plaques courtes.

Nous préconisons donc pour les cas de plaques à bord libre tendu, avec comme rapport de contrainte $\psi < -0,4$, de considérer le critère de l'Eurocode de plaque appuyée pour $a/b > 0,5$. Pour les plaques courtes ($a/b < 0,5$), nous proposons d'utiliser la résolution de l'**Equation IV-20** pour plus de précision. Les formules à utiliser sont résumées dans le **Tableau IV-5**.

3.2. Bilan

L'objectif principal de cette partie a été d'étudier la stabilité des panneaux comprimés pour avoir un regard critique sur les normes actuelles. Les parties précédentes ont permis de mettre en avant que le principal problème dans le dimensionnement des poutres à ouvertures sinusoïdales était de définir correctement la résistance des différentes sections autour de l'ouverture. Nous avons montré que les critères de classification de l'Eurocode sont mal adaptés à ces cas et qu'il est nécessaire d'améliorer ces critères de classification en définissant une nouvelle valeur de la contrainte critique.

Même si la valeur de la contrainte critique d'une plaque est de nature théorique, car elle ne considère pas les effets de plastification ou de non-linéarité des éléments, elle reste une référence pour établir la rigidité et la stabilité des parois. L'Eurocode 3 partie 1-5 fournit plusieurs règles permettant de caractériser la valeur de la contrainte critique d'une plaque pour diverses conditions d'appui et de chargement. Cependant, la principale lacune dans ces formules est l'absence du rapport dimensionnel de la plaque (a/b) qui permet de distinguer la contrainte critique d'une paroi longue avec celle d'une paroi courte. Ces codes sont principalement établis pour la vérification de parois telles que l'âme ou la semelle d'une poutre en acier. La longueur de ces différents éléments peut donc souvent être considérée infinie. Mais dans le cas d'une ouverture, la longueur de la plaque considérée entre deux points d'appui peut avoir une influence non négligeable. Cette notion permettrait de traduire le fait que les sections du quart d'ouverture proches du montant intermédiaire sont peu soumises à l'instabilité malgré une hauteur d'âme importante (voir §2.1.3).

L'étude proposée a permis de développer un modèle analytique de calcul du coefficient de contrainte critique d'une plaque en console en flexion composée. Ce nouveau calcul permet d'améliorer les valeurs de contraintes critiques par rapport à celles fournies par l'Eurocode pour les rapports $a/b < 1$, tout en restant proche des résultats numériques obtenus par calcul eulérien.

Enfin, nous avons montré que le modèle analytique est mal adapté au cas de plaque en console soumise à un rapport de contrainte négatif (de flexion composée) avec la traction du bord libre. En effet, la traction des fibres en bord libre les stabilise et agit comme un appui. Par conséquent, la forme de la déformée supposée analytiquement n'est plus valable. En revanche, nous avons montré que pour ce cas particulier de chargement, on peut définir un seuil de rapport de contrainte ψ à partir duquel il est possible de considérer la plaque comme appuyée sur quatre bords. Ce critère de nature théorique permet de considérer une valeur de contrainte critique analytique proche de celle obtenue avec le modèle MEF. Le **Tableau V-5** permet de faire le bilan des études analytiques faites précédemment et donne les formules à utiliser en fonction des différentes configurations de plaque rencontrées.

σ_{\max} au niveau de $y = b$ (bord libre)	$\psi > -3$	Equation IV-15	
	$\psi \leq -3$	Maximum :	
		Equation IV-15 avec $\psi_{\max} = 2,9$	EC3-1-5 tableau 4,2 Figure IV-14
σ_{\max} au niveau de $y = 0$	$\psi \geq 0$	Equation IV-17	

(appui)	$0 > \psi > -0,4$	EC3-1-5 tableau 4,2 Figure IV-14
	$\psi \leq -0,4$	EC3-1-5 tableau 4,2 Figure IV-14 ou Equation IV-19 pour $a/b \leq 0,5$

Tableau IV-5 Bilan des modèles à utiliser en fonction des configurations de chargement pour le calcul du coefficient de contrainte critique k_σ

Dans ce qui suit, nous allons voir comment appliquer ce nouveau calcul de coefficient de contrainte critique aux sections le long d'un quart d'ouverture. Le nouveau calcul du coefficient de contrainte critique k_σ devrait permettre d'améliorer le critère de classe 3 des sections ainsi que leur élanement critique, déterminant dans le calcul concernant les plaques semi-compactes.

4. ADAPTATION DU CALCUL DE PLAQUE AU QUART D'OUVERTURE

Cette partie a pour objectif de proposer une nouvelle forme de classification de sections le long du quart d'ouverture afin de permettre l'utilisation du nouveau calcul du coefficient k_σ . Le principal avantage de ce nouveau modèle est de permettre de considérer en plus de la dimension verticale des sections (hauteur d'âme des sections en té) le long de l'ouverture, la distance de la section étudiée au montant d'âme adjacent. La troisième partie a permis de montrer que sous réserve de conserver des valeurs géométriques d'ouverture dans les limites de conception, la liaison entre le montant d'âme et l'ouverture a été définie comme semi-rigide. Par conséquent, faire comme première hypothèse que la ligne d'appui puisse être considérée comme un appui hors plan est réaliste.

Les sections étudiées le long du quart d'ouverture sont toutes repérées par l'abscisse x en partant de la ligne d'appui comme décrit **Figure IV-32**.

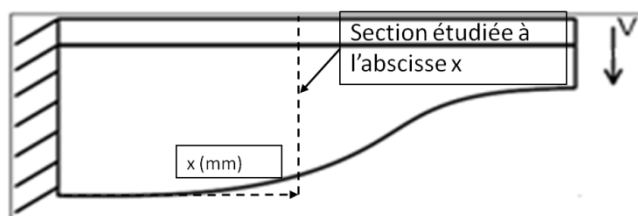


Figure IV-32 Etude de la classification d'une section à l'abscisse x sur la longueur d'un quart d'ouverture

Il est donc possible de caractériser la distance entre la section étudiée et un appui hors plan. Le diagramme de contrainte sollicitant la section à l'abscisse x traduit la flexion composée induite par V et N sur le quart d'ouverture. Pour définir la plaque équivalente pour la section étudiée, nous proposons de définir tout d'abord la largeur de la plaque, considérée comme égale à la hauteur

d'âme de la section en té étudiée. Cette dimension est la seule qui soit considérée dans la classification de l'Eurocode. La distance de la section à l'appui hors plan est connue (égale à l'abscisse x). Il est alors possible de proposer une longueur de plaque équivalente permettant de caractériser la stabilité de la section étudiée à l'abscisse x .

Effectuer l'étude d'instabilité d'une section à l'abscisse x revient à considérer le voilement au niveau de cette section en faisant abstraction de la stabilité des sections adjacentes. Ainsi le calcul de la contrainte critique pour la section à l'abscisse x revient à supposer le voilement de cette section.

Nous avons montré au travers des différentes études numériques et expérimentales que le voilement de ces sections se fait en une seule demi-onde (comme le cas standard de toute plaque en console comprimée). Par conséquent le déplacement hors plan maximal est localisé au niveau de la section à l'abscisse x et nul à la ligne d'appui. Chercher une plaque rectangulaire équivalente qui aurait un voilement similaire reviendrait à considérer une plaque dont la longueur permettrait d'obtenir le voilement de la section à l'abscisse x .

L'hypothèse au départ est de considérer le montant comme un simple appui hors plan. Pour une plaque en console appuyée sur trois bords, la section critique se situe à mi-longueur de la plaque. Finalement la longueur de la plaque équivalente peut donc être définie comme étant égale au double de l'abscisse de la section étudiée comme illustré à la **Figure IV-33**.

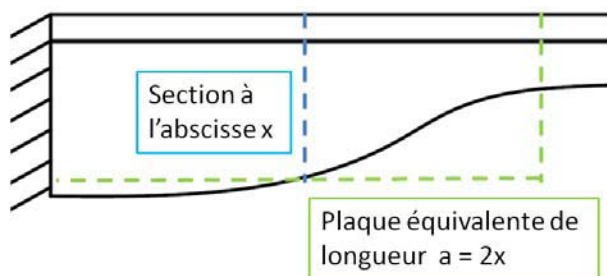


Figure IV-33 Illustration de la plaque équivalente pour la classification d'une section à l'abscisse x

La **Figure IV-34** présente le modèle de quart d'ouverture étudié sur Cast3m et donne la position de l'élément au déplacement hors plan maximal. L'effort critique est donc associé à la section verticale située à l'abscisse du point de déplacement hors plan maximal encadré en rouge sur la **Figure IV-34**.

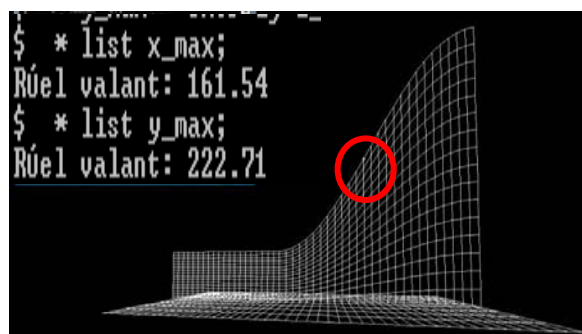


Figure IV-34 Modèle de quart d'ouverture et position de la section critique

Afin de valider l'approche de plaque équivalente, nous proposons d'étudier les charges critiques d'un modèle équivalent au quart d'ouverture avec cependant, une hauteur d'âme constante et une longueur (a) égale à l'abscisse x (cas 1) et un autre modèle avec une longueur égale à $2.x$ (cas 2). Ces deux modèles sont chargés par un diagramme de contrainte identique au diagramme de contrainte de flexion de la section à l'abscisse x du quart d'ouverture de la **Figure IV-34**. La **Figure IV-35** représente le premier mode de voilement du cas 2, pour lequel l'onde de voilement est parfaitement symétrique et se situe donc à une abscisse x identique au cas du quart d'ouverture de la **Figure IV-34**.

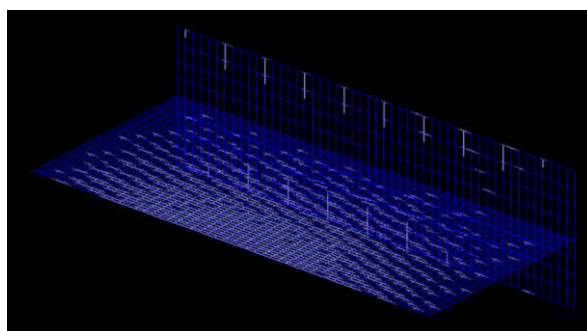


Figure IV-35 Illustration de la déformée modale du modèle étudié en cas 2

Le **Tableau IV-6** résume les résultats obtenus de coefficients de charge critique pour les trois modèles.

Cas	Quart d'ouverture	Cas 1 : $a = x$	Cas 2 : $a = 2.x$
Kcr : coefficient de charge critique	1756	2057	1433

Tableau IV-6 Efforts critiques pour le modèle de quart d'ouverture, d'élément rectiligne équivalent 1 et 2

Le **Tableau IV-6** montre que la valeur du coefficient de charge critique dépend de la longueur du modèle de plaque rectangulaire équivalente considéré. Ensuite, il apparaît que le modèle du cas 2 est plus représentatif du modèle de quart d'ouverture et reste conservatif (charge critique inférieure à la charge critique du modèle de quart d'ouverture). Cette observation permet de considérer qu'une

plaque de longueur $a = 2.x$ représente de manière réaliste la rigidité de la section considérée à l'abscisse x .

De plus, analytiquement, la plaque est considérée comme appuyée au niveau de la semelle, ce qui rajoute une hypothèse conservatrice par rapport au modèle MEF. Finalement pour caractériser la stabilité des différentes sections le long du quart d'ouverture repérées par l'abscisse x , il suffit de considérer la stabilité d'une plaque rectangulaire équivalente de longueur $a = 2.x$.

Ce nouveau critère de stabilité permet ainsi de mieux caractériser la résistance élastique des sections proches du montant, qui ont ainsi une longueur équivalente de plaque faible (car x est faible), ce qui implique un rapport a/b faible et donc une contrainte critique importante. Cependant, cette simple amélioration n'est pas suffisante car elle permet seulement de justifier de la résistance élastique des sections alors que la contrainte critique peut, pour les sections proches du montant, tendre vers l'infini. Le paragraphe suivant a donc pour objectif l'étude des plaques dites semi-compactes, qui permet de justifier d'une résistance élastoplastique de ces sections.

5. PLAQUES SEMI-COMPACTES

Cette partie fournit les bases permettant de considérer de manière analytique le fait qu'une plaque soit semi-compacte. L'idée est de faire le lien entre les sections de classe 2 qui déploient leurs pleines résistances plastiques et les sections de classe 3 qui ne peuvent atteindre leurs limites élastiques qu'au niveau de la fibre la plus comprimée. La partie 1-1 de l'Eurocode ne permet pas de définir des résistances de section intermédiaires à ces deux limites.

A partir d'une certaine hauteur d'âme, les sections en T étudiées passent d'une classe 2 à une classe 3 (voir **Figure IV-7**). Ce changement de classification entraîne donc un saut de moment résistant. Les sections de moindre élancement sont de classe 2 et ont un moment résistant égal au moment plastique. Une fois que l'élancement de ces sections dépasse le critère de classe 2, leurs résistances analytiques chutent pour être considérées comme égales à la résistance élastique.

Ce saut de résistance théorique est aberrant d'un point de vue pratique. En effet deux sections très proches l'une de l'autre ne peuvent pas avoir une différence nette de résistance et de comportement à cause d'un critère de hauteur d'âme. Les sections de classe 3 devraient avoir une résistance élastoplastique entre la résistance plastique et la résistance élastique. La détermination de la résistance d'une section semi-compacte correspond à une interpolation entre le moment résistant plastique et le moment résistant élastique ; elle suit une procédure de plusieurs étapes. **[EC, 09]**

- Etape 1 : la classification. Cette étape correspond à la classification de la section afin de vérifier qu'elle se situe dans les bornes de la classe 3 pour les sollicitations N_{Ed} et M_{Ed} qui lui sont appliquées.
- Etape 2 : interpolation du moment résistant. C'est l'étape la plus importante car elle consiste à déterminer le moment résistant sous flexion simple de la section semi-compacte.

Cette résistance de plaque semi-compacte est déduite d'une interpolation linéaire entre le moment élastique et le moment plastique de la section, suivant un élancement relatif adimensionnel $(c/t)_{ref}$. Ce rapport vaut 0 pour la limite correspondant au moment plastique et vaut 1 lorsque le moment résistant de la plaque équivaut au moment résistant élastique. La résistance élastoplastique correspond donc à une interpolation linéaire entre ces deux valeurs (voir **Figure IV-36**).

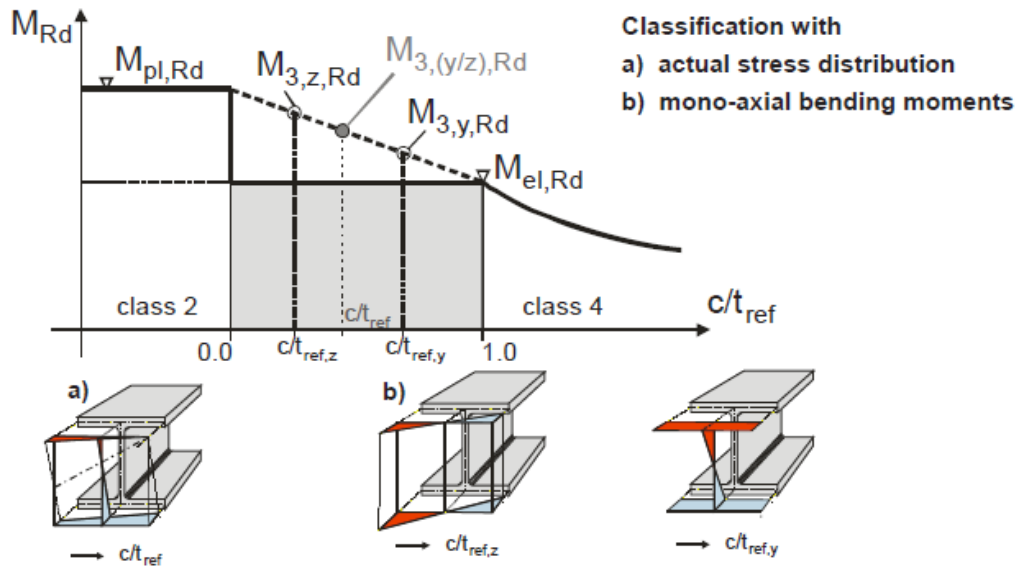


Figure IV-36 Classification due à (a) la distribution de contrainte dans la section, (b) la flexion mono-axiale [EC, 09]

L'Eurocode EN 1993-1-3 prévoit une formule qui permet de déterminer la valeur du module de flexion conformément à cette interaction linéaire [EN3-1-3]. Cette interaction se fait non pas en fonction du rapport $(c/t)_{ref}$ comme dans la référence [EC, 09] mais donne la formule suivant la valeur de l'élancement réduit λ_p (identique à $\bar{\lambda}_b$). Cela reviendrait au même dans le cas où l'élancement réduit serait uniquement fonction de la première dimension c de la section. Or dans le cas étudié du quart d'ouverture avec des sections correspondant à des plaques appuyées sur trois bords, il est important de faire intervenir les deux dimensions de la plaque. La formule donnée par l'Eurocode est :

- Si le module d'inertie de la section efficace est inférieur au module élastique de la section brute :

$$M_{c,Rd} = W_{eff} f_y / \gamma_{M0} \quad \text{Equation IV-20}$$

- Si le module de la section efficace est égal au module de la section brute, on a alors :

$$M_{c,Rd} = f_y (W_{el} + (W_{pl} - W_{el}) 4(1 - \lambda_p / \lambda_{el}) / \gamma_{M0} \quad \text{Equation IV-21}$$

Avec pour les parois en console :

$\lambda_p = \frac{c/t}{28,4\epsilon\sqrt{k_\sigma}}$ et $\lambda_{el} = 0,748$ (et non pas 0,673 donné dans la partie 1,3 de l'Eurocode 3-1-3).

De plus, le nouveau modèle développé pour le calcul du voilement de plaque permet de justifier une nouvelle valeur du coefficient de contrainte critique (k_σ), au niveau des sections proches du montant, bien plus élevée que celle donnée précédemment par l'Eurocode. Ce nouveau calcul de k_σ entraîne une nouvelle valeur de λ_p qui considère donc dorénavant le cas d'une plaque appuyée sur trois bords.

Comme la formule de l'EN 1993-1-3 utilise non pas c/t mais l'élancement réduit λ_p pour l'interpolation entre les moments élastique et plastique, alors le module d'inertie déduit de l'**Equation IV-21** peut se retrouver égal au module plastique si les valeurs d'élancement sont suffisamment faibles. La **Figure IV-37** donne l'allure du premier diagramme de moment résistant sans considérer ni le nouveau calcul de k_σ ni l'adaptation des règles pour les plaques semi-compactes. L'encadré rouge de la figure met en avant le saut de moment résistant entre les sections de classe 2 et de classe 3.

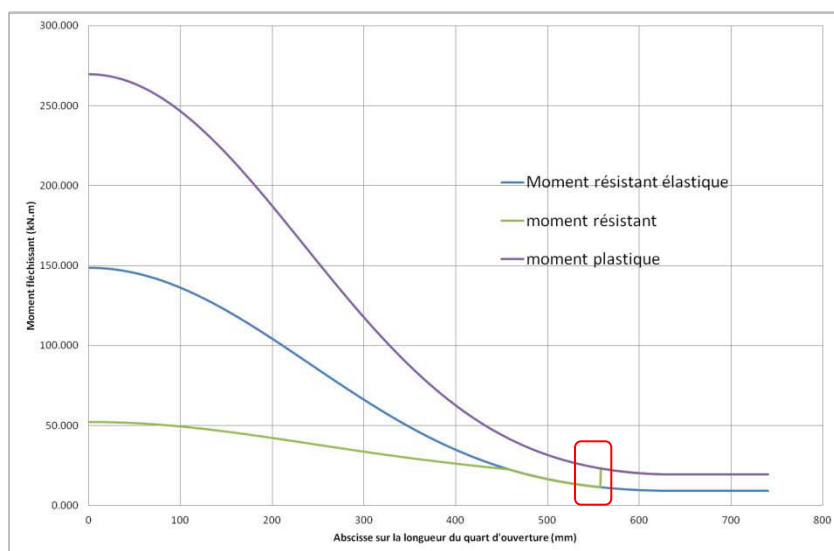


Figure IV-37 Evolution du moment résistant sur la longueur du quart d'ouverture

Ensuite, la **Figure IV-38** présente le nouveau diagramme de moment résistant en considérant le nouveau calcul de k_σ et l'interpolation moment élastique-moment plastique de l'Eurocode 3 partie 1-3.

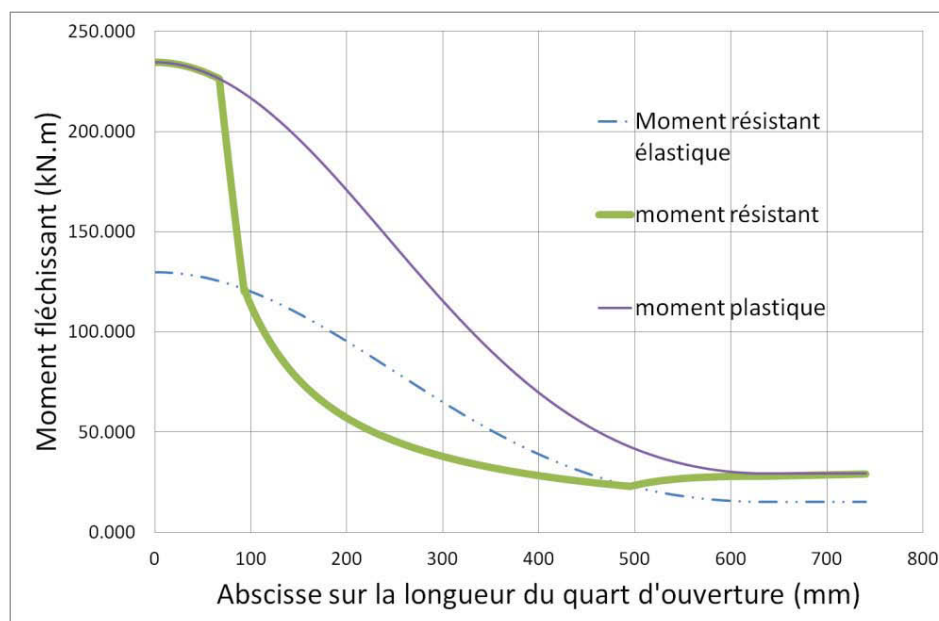


Figure IV-38 Evolution du moment résistant en considérant la semi-compacité des parois ainsi que le nouveau modèle de calcul pour k_{σ}

La **Figure IV-38** montre clairement une forte augmentation de résistance de la zone proche du montant d'âme adjacent (abscisse $x < 100$). Finalement le travail théorique a permis de justifier une résistance des sections proches du montant bien plus élevée que celle déduite de la simple classification verticale des sections en suivant le modèle de calcul de contrainte critique de voilement et l'adaptation du critère de plaque semi-compacte de l'Eurocode. L'exemple d'application proposé en Annexe G permet d'illustrer la manière dont est utilisé le calcul de résistance de section en té en fonction du calcul de contrainte critique d'une plaque en console.

6. CONCLUSION

L'étude faite sur la stabilité des plaques a permis d'augmenter la résistance des sections dans une zone du quart d'ouverture. En revanche, il reste encore une zone, écartée du montant d'âme pleine, qui risque d'être encore sous-estimée d'un point de vue résistance. Pour pallier ce problème, il serait intéressant d'intégrer dans le calcul de k_{σ} les maintiens rotationnels apportés par le montant et par la semelle. Les premiers travaux analytiques ont cependant permis de décrire la résistance d'un quart d'ouverture de manière plus juste que les précédentes méthodes présentées en début de cette partie. Enfin, cette partie a permis de mieux décrire la stabilité et la résistance du quart d'ouverture, le plus souvent critique en terme d'instabilité. Cependant, afin de développer un modèle analytique représentatif de la résistance ultime d'une poutre à ouverture sinusoïdale, une dernière piste est développée dans la partie cinq.

En effet, les études numériques faites en deuxième partie ont permis de constater que la ruine d'une ouverture semble être liée à la ruine par instabilité ou par plastification d'une partie de

l'ouverture ainsi qu'à un mécanisme de ruine de l'ouverture. Il a été montré que la ruine de l'ouverture correspond à plusieurs ruines locales autour de l'ouverture. Le système mécanique de poutre cellulaire, assimilée à une poutre échelle, est hyperstatique interne de plusieurs degrés. Cette hyperstaticité interne permet au système de continuer à reprendre des efforts externes malgré la ruine d'une partie de l'ouverture. L'étude qui suit vise à mieux caractériser le schéma de ruine d'une ouverture afin de mieux comprendre les possibles redistributions d'efforts autour de l'ouverture qui permettent d'augmenter la résistance ultime de la poutre.

PARTIE V -ETUDE DE L'OUVERTURE GLOBALE-

- 1- Introduction
- 2- Modèle analytique de résistance ultime d'une ouverture rectangulaire
- 3- Résistances ultimes et modes de ruine pour diverses formes d'ouvertures sinusoïdales
- 4- Comparaison entre ouvertures sinusoïdale, rectangulaire et hexagonale
- 5- Bilan
- 6- Analyse du modèle d'ouverture isolée
- 7- Validation du modèle analytique
- 8- Conclusion

1. INTRODUCTION

Les premiers modèles analytiques sont basés sur le fait que la résistance de l'ouverture est gouvernée par la résistance minimale de ses quatre quarts, suivant les différentes sollicitations qui leurs sont appliquées [BIT, 04] [CHU, 01] [MAN, 09-1] [TSA, 10]. Les observations expérimentales et numériques faites en deuxième partie ont mis en évidence la capacité de l'ouverture à reprendre des efforts malgré la plastification ou le voilement d'une ou plusieurs de ses parties. Ainsi, après avoir vu comment définir au mieux la résistance locale de chaque quart d'ouverture, cette dernière partie concerne le comportement global de l'ouverture en essayant de traduire analytiquement la résistance liée au mécanisme de ruine d'une ouverture.

La première étape de la recherche consiste à étudier le cas simple de la plastification totale de l'ouverture. La plastification totale correspond au fait que, sous flexion Vierendeel, quatre rotules plastiques apparaissent aux quatre coins de l'ouverture. Cette forme de ruine est simple car elle nécessite des calculs analytiques qui ne font pas intervenir les problèmes liés à l'instabilité de paroi. De plus, comme le mode de ruine est similaire à celui d'une ouverture rectangulaire ou hexagonale, traiter ce mécanisme de ruine est plus aisé. Cependant ce mode de ruine n'apparaît que pour certaines formes d'ouvertures. La première forme d'ouverture ayant donné ce mode de ruine est celle de la poutre AS016 testée expérimentalement. La **Figure V-1** rappelle le mode de ruine plastique de la poutre AS016 en configuration de poutre globale et de montant isolé.

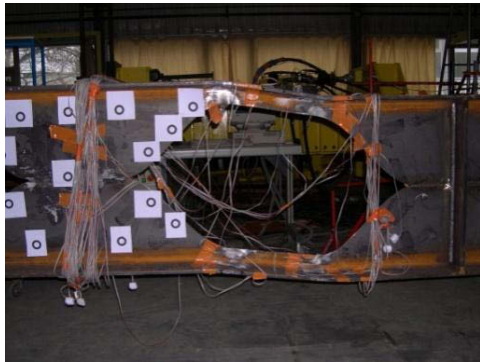


Figure V-1 Exemple des deux modèles avec ruine par formation de rotule plastique (poutre globale à gauche et montant isolé à droite)

Tout d'abord nous présentons le modèle analytique développé pour caractériser la résistance d'une ouverture rectangulaire. Il s'avère que les modèles proposés dans la littérature ont quelques lacunes (notamment au niveau de l'interaction M-N). Les cas d'ouvertures sinusoïdales pour lesquelles nous avons observé une ruine par plastification des 4 coins de l'ouverture peuvent faire l'objet d'une équivalence avec une ouverture hexagonale ou rectangulaire. Ensuite, l'adaptation du modèle analytique d'ouverture rectangulaire aux cas des ouvertures sinusoïdales dont l'état ultime est la plastification de l'ouverture sera confrontée aux résultats MEF.

Puis nous comparons les résultats obtenus grâce au modèle éléments finis pour des modèles d'ouvertures sinusoïdales avec les modèles d'ouvertures rectangulaires équivalentes. Cette première comparaison permettra de mettre en évidence certaines différences entre ces deux modèles afin de comprendre les écarts obtenus entre les résultats numériques et analytiques en considérant la méthode d'ouverture rectangulaire équivalente.

Ensuite, nous proposons d'étudier un nouveau modèle numérique simplifié, celui d'une ouverture en console. Ce nouveau modèle numérique permet une étude plus précise de la répartition des contraintes autour d'une ouverture. Le modèle donne ainsi l'opportunité d'analyser la résistance d'une ouverture pour des efforts similaires à ceux d'un cadre de poutre échelle et de mettre ainsi en évidence les éventuelles redistributions d'efforts exclusivement autour de l'ouverture.

Enfin, cette dernière partie fait le bilan des travaux analytiques faits depuis le départ pour proposer un modèle analytique qui considère de manière réaliste la résistance d'un quart isolé et la résistance en mécanisme d'une ouverture sinusoïdale. Ce dernier modèle sera ensuite validé au travers d'une étude comparative avec les charges ultimes données par la MEF pour différentes configurations de poutres à ouvertures sinusoïdales.

2. MODELE ANALYTIQUE DE RESISTANCE ULTIME D'UNE OUVERTURE RECTANGULAIRE

Actuellement, le modèle analytique considère que la ruine d'une partie de l'ouverture suffit pour définir la ruine globale de l'ouverture sans considérer de mécanisme ou de résistance post-critique. Un premier travail théorique permet de caractériser de manière précise la résistance totale d'une ouverture rectangulaire. Ensuite, ce modèle de résistance plastique d'ouverture est appliqué aux cas étudiés d'ouvertures sinusoïdales.

La résistance d'une ouverture rectangulaire à la flexion Vierendeel est habituellement vérifiée au travers de la condition suivante: **[VEL, 06]**

$$V \times L_0 = 2 \times M_{\text{inf,red}} + 2 \times M_{\text{sup,red}}$$

Equation V-1

Avec:

- V: effort tranchant global au droit de l'ouverture
- L_0 : longueur de l'ouverture
- $M_{\text{inf,red}}$ et $M_{\text{sup,red}}$: Moments plastiques réduits par l'effort axial et cisaillement des membrures supérieures et inférieures.

Ainsi, pour une ouverture rectangulaire centrée dans une poutre non mixte on a :

$$V \times L_0 = 4 \times M_{t\acute{e},red}$$

Equation V-2

Avec $M_{t\acute{e},red}$: moment résistant de la section en té au coin de l'ouverture réduit par la présence de l'effort axial par interaction M-N quadratique[VEL, 06]. Cette méthode revient donc exactement au même que celle qui considère la vérification de chaque quart d'ouverture pris séparément avec :

$$V/2 \times L_0/2 = M_{t\acute{e},red}$$

Equation V-3

En effet, cette méthode repose sur l'hypothèse de la formation simultanée des 4 rotules plastiques. Cependant, cette équation n'est pas précise car elle considère une interaction moment-effort axial quadratique. Or il s'avère que le diagramme d'une telle interaction est doublement symétrique par rapport aux axes N/N_{Rd} et M/M_{pl} . Ainsi, le moment résistant est le même pour les sections des deux membrures. Cependant, il a été prouvé précédemment que l'interaction M-N d'une section en té est dissymétrique par rapport à ces axes. Ainsi, le moment résistant est différent entre deux coins d'ouverture d'une même membrure car les signes du moment Vierendeel sont opposés pour un même signe d'effort axial (voir **Figure V-2**).

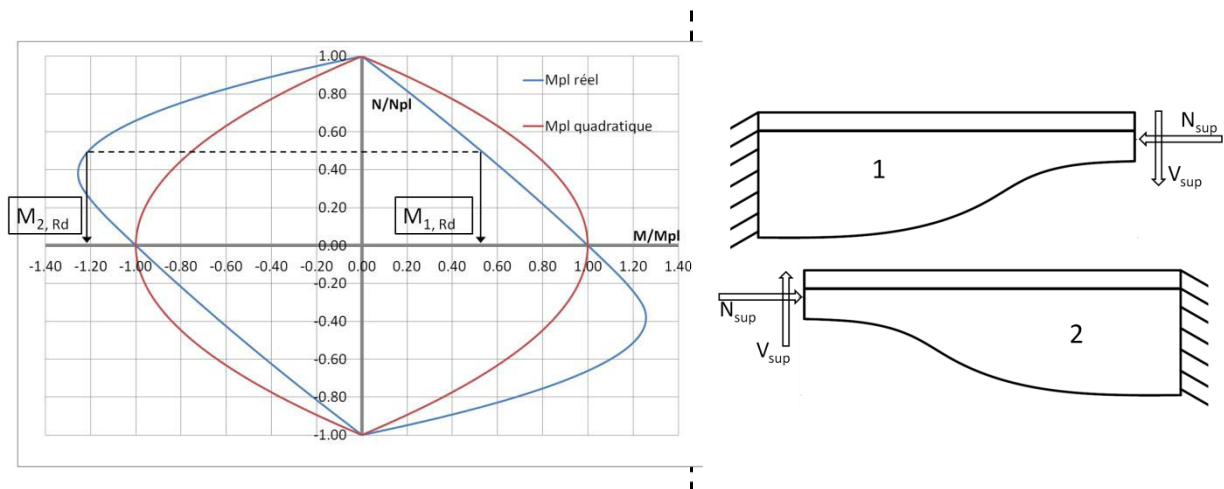


Figure V-2 Illustration de la différence de moment résistant entre 2 parties de la même ouverture

La **Figure V-2** montre que deux des quatre sections critiques de l'ouverture se situent sur la partie linéaire de l'interaction alors que les deux autres sections sont sur la partie parabolique. Cette différence de résistance entre les parties de l'ouverture implique donc deux valeurs de moment résistant plastique $M_{pl,N,min}$ et $M_{pl,N,max}$. Nous observons alors la formation de deux premières rotules plastiques. Puis une redistribution d'efforts autour de l'ouverture s'opère, jusqu'à la formation des deux autres rotules qui entraîne un mécanisme dans l'ouverture et donc la ruine de la poutre à l'image d'un cadre de poutre échelle.

Dans le but de traiter la résistance finale d'une ouverture rectangulaire nous choisissons de faire une étude analytique d'un cadre en console dont la répartition des efforts est identique à celle d'un cadre de poutre échelle utilisé pour caractériser le comportement d'une large ouverture

rectangulaire. Ce modèle simplifié nous permet alors de déterminer de manière exacte la nouvelle répartition des efforts au sein du cadre après la formation de deux rotules plastiques.

2.1. Répartition des efforts au sein d'un cadre hyperstatique

L'hypothèse générale pour traiter le problème d'une poutre avec des ouvertures rectangulaires uniformément réparties revient à considérer que la poutre fonctionne comme une poutre échelle chargée en ses nœuds. Le problème d'une poutre échelle est relativement lourd à traiter de manière analytique. Il est plus simple de partir d'un modèle simplifié en n'étudiant qu'un cadre hyperstatique en console. Ce cadre hyperstatique a une hyperstaticité interne de degré 3. Il est par ailleurs isostatique externe. Une première étude sur un logiciel de calcul de RDM permet de mettre en évidence que les moments fléchissant sont bitriangulaires, comme observé sur un cadre de poutre échelle. Les moments aux quatre coins du cadre sont identiques au signe près (voir **Figure V-3**).

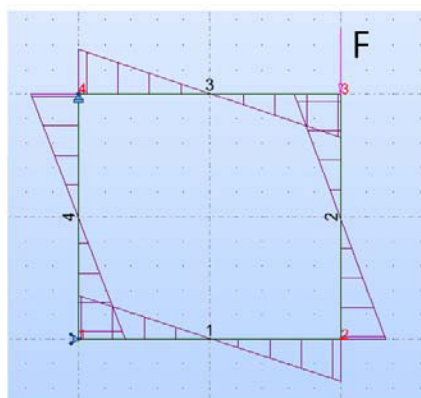


Figure V-3 Représentation du cadre en console avec les diagrammes des moments fléchissant dans chaque membrure à l'aide du logiciel ROBOT

Bien évidemment, à ces moments fléchissant viennent s'ajouter des efforts de compression ou de traction dans chaque membrure. Ainsi, pour déterminer la résistance des différentes sections il faut considérer principalement l'interaction M-N. Pour les sections symétriques, nous retrouvons des moments résistants égaux dans chaque coin du cadre. Par conséquent, comme les nœuds sont également sollicités, la ruine se produit par la formation simultanée de 4 rotules plastiques aux 4 coins du cadre.

Par contre si les sections, comme dans le cas des membrures d'une ouverture dans l'âme d'une poutre, sont dissymétriques, l'interaction M-N ne donnera pas les mêmes valeurs de moment résistant pour chaque nœud. Ainsi les différents coins du cadre auraient une même sollicitation mais avec des résistances différentes. La ruine sera alors précédée par la formation de premières rotules plastiques.

Ces premières rotules entraînent une nouvelle répartition des efforts autour du cadre. Les membrures sont dès lors sollicitées par des nouveaux diagrammes de moment fléchissant et d'effort axial, qui interagissent l'un l'autre pour former les dernières rotules plastiques.

L'étude détaillée du schéma de ruine de ce type de cadre permet de mieux appréhender la valeur de l'effort ultime, ou du moins, de mieux comprendre la répartition des efforts autour d'une ouverture rectangulaire. L'étude des efforts autour d'une ouverture permet d'affirmer que les deux quarts d'ouverture du côté de faible moment sur la longueur de la poutre ont un moment résistant par interaction M-N minimal (voir **Figure V-2**). Pour schématiser ce comportement, il s'agit de supposer la formation de deux rotules dans le cadre d'origine aux nœuds 1 et 4. La **Figure V-4** présente le nouveau cadre ainsi que la nouvelle répartition de moment fléchissant dans les différentes membrures.

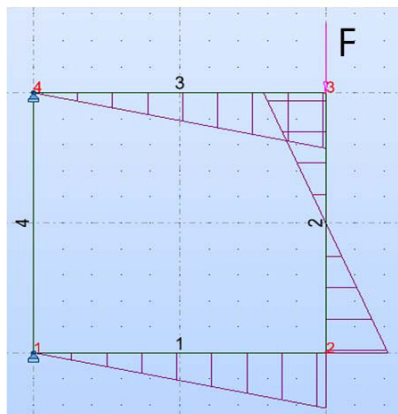


Figure V-4 Diagramme des moments fléchissant pour le cadre après la formation de deux rotules aux nœuds 1 et 4

Le travail consiste à déterminer le nouveau moment fléchissant aux nœuds 2 et 3.

2.2. Résolution du problème de cadre hyperstatique en console

La méthode de résolution choisie est celle qui consiste à effectuer une coupure dans une des membrures. Seuls les résultats sont donnés car la méthode est traitée dans les ouvrages de calcul de structures (les formules sont rappelées en **Annexe E**, des exemples sont donnés dans les références **[REA, 02]** et **[BAH, 68]**). Les expressions des moments aux 4 coins d'un cadre en fonction de la longueur L et de la hauteur H , pour des sections rectangulaires, ont des formes complexes (voir **Annexe E**). C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de ne présenter que les valeurs de moments aux coins du cadre, obtenues pour des exemples simples de cadres carré ($L = H$) et rectangulaires ($L = 2 \times H$ et $4 \times H$).

$L = H = 4m$	$H = 2m \text{ et } L = 4m$	$H = 2m \text{ et } L = 8m$
$M1 = -1,00 \times F$	$M1 = -1,00 \times F$	$M1 = -2,00 \times F$
$M2 = 0,99 \times F$	$M2 = 0,99 \times F$	$M2 = 1,99 \times F$
$M3 = -0,99 \times F$	$M3 = -0,99 \times F$	$M3 = -1,99 \times F$
$M4 = 1,00 \times F$	$M4 = 1,00 \times F$	$M4 = 2,00 \times F$

Tableau V-1 Résultats des efforts internes de flexion aux nœuds du cadre hyperstatique de degré 3 en console

La résolution analytique d'un cadre hyperstatique en console permet de confirmer que la méthode simplifiée qui définit le moment aux coins tel que : $M_v = F/2 \times L/2 = F \times L/4$ donne un résultat très correct. La même remarque peut être faite concernant l'effort axial N dans les membrures du cadre qui peut se traduire comme étant $N = M_{global}/H = F \times L / (2 \times H)$.

Cette première étude permet de valider analytiquement le modèle analytique simplifié permettant de calculer un cadre hyperstatique et permet de justifier le fait que l'on puisse approximer le moment Vierendeel au coin d'une ouverture rectangulaire de largeur w tel que :

$$M_v = V_{global}/2 \times w/2$$

2.3. Etude post-plastique (après la formation des premières rotules)

La formation des premières rotules implique donc que le moment plastique résistant minimal vérifie :

$$M_{pl,N, min} = F_{pl}/2 \times w/2 \quad \text{Equation V-4}$$

Avec F_{pl} : l'effort plastique sollicitant une poutre en flexion 4 points qui entraîne la formation des deux premières rotules plastiques.

Après la formation des deux premières rotules plastiques, les deux autres sections, de résistance plastique $M_{pl,N, max}$ devront vérifier:

$$M_{pl,N, max} = M_{pl,min} + \Delta M \quad \text{Equation V-5}$$

Le terme ΔM correspond à l'incrément de moment sollicitant dans le nouveau système de cadre composé de deux rotules plastiques.

Résolution analytique du cadre hyperstatique après la formation de deux premières rotules :

Maintenant il s'agit de s'intéresser au schéma mécanique décrit sur la **Figure V-5**. Pour déterminer la nouvelle répartition d'efforts, on considère une coupure par une rotule dans une barre libérant le degré d'hyperstatisme.

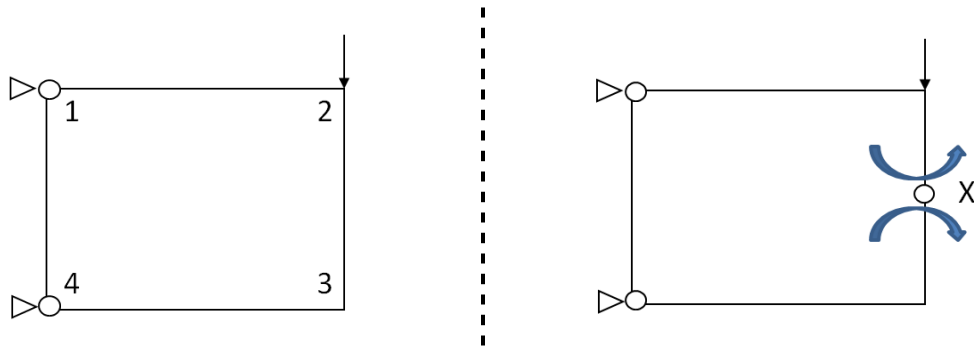


Figure V-5 Modèle de cadre après formation des deux rotules plastiques et système iso-équivalent

Ce système est soumis à un nouveau diagramme de moment fléchissant et d'effort axial. Un exemple de nouvelle répartition de ces efforts calculés sur ROBOT est donné à la **Figure V-4**. Les diagrammes sont maintenant triangulaires et les valeurs d'efforts données par le logiciel de calcul ROBOT correspondent, pour un même effort F que précédemment, au double des efforts obtenus pour un cadre avec des liaisons rigides aux 4 coins (**Figure V-4**). L'étude analytique va donc chercher à valider cette hypothèse.

L'analyse du système isostatique de référence permet de déterminer l'inconnue hyperstatique X de moment au niveau de la rotule prise dans la barre 2 (voir sur la droite de la **Figure V-5**), celle-ci vaut :

$$X = \frac{F \times L^2 / 12}{\left(\frac{2}{3}L + H\right)} \quad \text{Equation V-6}$$

Le moment sollicitant M_{02}^s au nœud 2 du système isostatique de référence s'écrit :

$$M_{02} = \frac{FL}{2} \quad \text{Equation V-7}$$

On en déduit alors le moment sollicitant réel :

$$M_2 = \frac{FL}{2} + \frac{FL^2}{(8L + 12H)} \quad \text{Equation V-8}$$

De plus, on obtient comme effort normal dans les membrures supérieure et inférieure :

$$N = \pm \frac{FL}{H} \quad \text{Equation V-9}$$

Il peut être noté que le second membre de la formule du moment sollicitant M_2 (**Equation V-8**) peut être négligé, notamment pour des cadres dont la hauteur (H) est du même ordre de grandeur que la longueur (L). Ainsi l'incrément de moment ΔM appliqué peut être approximé tel que :

$$\Delta M = \frac{\pm \Delta F L}{2} \quad \text{Equation V-10}$$

Et pour l'effort normal : $\Delta N = \Delta F$.

Dans la configuration de cadre avec 2 rotules (**Figure V-4**), les sollicitations des deux encastremets et des membrures sont doublées par rapport au modèle de cadre avec 4 nœuds rigides (**Figure V-3**). Par conséquent, **pour considérer la redistribution plastique d'efforts autour d'un cadre après la formation des deux premières rotules, il suffit de doubler les formulations habituelles appliquées à un incrément de charge ΔF .**

2.4. Applications du modèle de résistance ultime de cadre

L'étude analytique précédente a permis de montrer que la résistance ultime d'un cadre encastré aux 4 nœuds se décompose en deux parties. La première partie correspond à la première plastification du système de cadre. Les coins du cadre qui ont le moment plastique minimal, du fait de l'interaction M-N, vont plastifier en premiers. Ensuite les deux autres coins de l'ouverture reprennent sous l'incrément de charge ΔF un supplément d'effort axial ΔN et de moment fléchissant ΔM_v . L'intensité des efforts, sur les deux sections qui n'ont pas plastifié, se retrouve doublée par rapport à la configuration de cadre originel.

Il est proposé d'étudier l'application du modèle analytique de résistance ultime d'un cadre hyperstatique à un exemple de cadre hyperstatique muni de membrures ayant des sections en Té, puis à un exemple de poutre à ouverture rectangulaire. Enfin un troisième exemple concerne l'application de ce modèle à une poutre cellulaire à ouvertures sinusoïdales correspondant à la poutre testée AS016.

Exemple d'application 01

Cet exemple traite un cadre hyperstatique de longueur $L_0 = 1\text{m}$, de hauteur $H = 0.8\text{m}$, la hauteur H correspond à la distance entre les deux centres de gravité des membrures supérieures et inférieures du cadre. Les sections en té des membrures supérieures et inférieures sont tirées d'un profilé IPE500 avec une hauteur d'âme (en considérant le congé de raccordement) $h = 67.5\text{mm}$.

$$F_{pl} = 2 \times V_{pl} = 2 \times M_{pl,N} / (L_0/2)$$

- V_{pl} : Effort tranchant local dans la membrure supérieure ou inférieure du cadre,
- $M_{pl,N,min}$: Moment résistant plastique d'une section en té en considérant l'interaction M-N minimale donnant ainsi le moment résistant des deux sections pour lesquelles se forment les deux premières rotules plastiques autour de l'ouverture.

Un premier calcul analytique permet de déterminer l'effort F_{pl} pour lequel l'ouverture atteint la formation des premières rotules plastiques dans les parties de plus faible résistance plastique. L'effort ultime se calcule en supposant un incrément d'effort dans les deux membrures de l'ouverture suivant la nouvelle répartition d'effort qui donne, en se fondant sur l'étude élastoplastique d'un cadre hyperstatique:

$$\Delta M_v = \Delta V_{sup} \times L_0/2 = \Delta F/2 \times L_0 \text{ et } \Delta N_{sup} = \Delta F \times L_0 / H.$$

Ensuite pour déterminer l'effort ultime nous supposons que :

$$M_v = \Delta V_{sup} \times L_0 + M_{pl,N,min} \text{ et } N_{sup} = \Delta F \times L_0 / H + F_{pl} \times L_0 / (2 \times H)$$

Cette configuration de cadre donne pour la plastification des premières rotules les efforts :

- $F_{pl} = 79.5 \text{ kN}$
- $\Delta F = 1.1 \text{ kN}$
- $F_{ult} = F_{pl} + \Delta F = 80.6 \text{ kN}$

L'incrément d'effort pour atteindre la seconde rotule plastique est de 1.1 kN. Nous pouvons constater que l'effort supplémentaire est négligeable. Ceci est dû au fait que le modèle de cadre hyperstatique implique un moment fléchissant global faible. Un faible moment global implique un effort axial dans les membrures qui influe de manière négligeable sur le moment résistant plastique des sections du cadre. En revanche, il est certain que dans une configuration de poutre, le moment global serait plus important ce qui entraînerait une plus forte différence entre les résistances plastiques des sections aux coins de l'ouverture.

Nous pouvons constater que si nous supposons une répartition élastique des efforts, l'effort F_{pl} pour la plastification des deux autres coins de l'ouverture serait $F_{pl} = 81.7 \text{ kN}$. La moyenne des efforts 79.5 kN et 81.7 kN donne exactement 80.6 kN. Un second exemple est traité, il s'agit d'étudier la résistance plastique d'une poutre munie d'ouvertures rectangulaires, chaque ouverture pouvant être considérée comme un cadre similaire à ce premier exemple.

Exemple d'application 02

Cet exemple traite une poutre en flexion 4 points de profilé initial IPE 500, munie de 6 ouvertures rectangulaires espacées de $w = 1 \text{ m}$ de hauteur $a_0 = 428 \text{ mm}$, de longueur $L_0 = 400 \text{ mm}$ et de hauteur finale $H_{tot} = 714 \text{ mm}$. Ce cas correspond à l'ouverture rectangulaire équivalente de la configuration 0,6_0,4 d'ouverture sinusoïdale du **Tableau V-4**. Le calcul analytique permet de retrouver les différentes valeurs de l'effort appliqué correspondant aux différentes étapes de la ruine de l'ouverture : l'effort F_{pl} pour la formation des premières rotules, l'incrément d'effort ΔF qui entraîne la ruine de l'ouverture avec les efforts internes tranchant et axial (V et N) correspondant. Ces valeurs sont résumées dans le **Tableau V-2**.

$F_{pl} \text{ (kN)}$	$\Delta F \text{ (kN)}$	$F_{ult} = F_{pl} + \Delta F \text{ (kN)}$
-----------------------	-------------------------	--

Valeur de l'effort : F	261.2	67.7	328.9
Effort tranchant des membrures : V_{sup}	130.6	33.9	164.45
Effort axial des membrures : N	1152	597	1749

Tableau V-2 Efforts analytiques global (F) et dans les membrures (V et N) correspondant aux différentes étapes de la ruine d'une ouverture rectangulaire

Le modèle analytique donne ainsi un effort ultime $F_{ult.} = 328.9$ kN.

Soit F_{pl1} l'effort correspondant à la résistance plastique minimale de l'ouverture et F_{pl2} l'effort correspondant à la résistance plastique maximale (voir **Figure V-2**), nous obtenons :

- $F_{pl1} = 261.2$ kN : effort plastique des quarts d'ouverture de résistance plastique minimale
- $F_{pl2} = 396.6$ kN : effort plastique des quarts d'ouverture de résistance plastique maximale

Il apparaît que $(F_{pl1} + F_{pl2})/2 = 328.9$ kN. Ainsi, nous constatons que l'effort ultime d'une ouverture rectangulaire est la moyenne des efforts ultimes des différentes parties de l'ouverture. Nous pouvons noter que l'approche analytique incrémentale permet de valider cette approche simpliste. Le **Tableau V-3** compare l'approche simplifiée avec l'approche incrémentale.

Méthode simplifiée	Incrémentale
$F_{pl1} = 261.2$ kN	$F_{pl1} = 261.2$ kN
$V_{sup} = 130.6$ kN	$V_{sup} = 130.6$ kN
$N_{sup} = 1152$ kN	$N_{sup} = 1152$ kN
$F_{pl2} = 396.6$ kN	$\Delta F = 67.7$ kN
$V_{sup} = 198.3$ kN	$\Delta V = 33.9$ kN
$N_{sup} = 1749$ kN	$\Delta N = 597$ kN
$F_{ult} = (F_{pl1} + F_{pl2})/2 = 328.9$ kN	$F_{ult} = 328.9$ kN et $N_{ult} = 1749$ kN

Tableau V-3 Comparaison des deux approches analytiques

Nous constatons que la méthode qui consiste à faire la moyenne entre les deux efforts plastiques revient exactement au même résultat que celui fournit au travers d'une analyse incrémentale de l'effort ultime d'un cadre. Cette conclusion permet ainsi de définir que l'effort ultime d'un cadre hyperstatique de membrures supérieure et inférieure identiques et de sections dissymétriques (en té) peut s'écrire :

$$F_{ult} = (F_{pl1} + F_{pl2} + F_{pl3} + F_{pl4})/4 \quad \text{Equation V-11}$$

Avec :

- F_{pli} : l'effort F correspondant à la plastification du coin i du cadre hyperstatique.

Ainsi, dans le cas où les efforts ultimes des différentes parties de l'ouverture sont identiques deux à deux cela donne:

$$F_{ult} = (F_{pl,min} + F_{pl,max})/2$$

Equation V-12

- $F_{pl,min}$: Efforts F correspondant à la formation des premières rotules de résistance plastique minimale.
- $F_{pl,max}$: Efforts F correspondant à la formation des premières rotules de résistance plastique maximale.

Exemple d'application 03

Il s'agit dans cet exemple d'étudier l'application du modèle analytique de résistance plastique d'une ouverture rectangulaire au cas d'une ouverture sinusoïdale qui a montré une ruine similaire à une ouverture rectangulaire, la poutre testée AS016. Il est possible pour cette poutre de considérer une ouverture rectangulaire équivalente de longueur $L_0 = w$. Ainsi, le modèle analytique donne :

- Si le modèle considère la résistance minimale entre les différentes parties de l'ouverture :
 $F_{ult,analytique} = 103 \text{ kN}$
- Si le modèle considère la moyenne des résistances plastiques des parties de l'ouverture :
 $F_{pl} = (103 + 145)/2 = 124 \text{ kN}$
- Le modèle numérique donne : $F_{ult,MEF} = 116,9 \text{ kN}$

D'un point de vue théorique, considérer une résistance plastique de l'ouverture entraîne un écart insécuritaire de 5 à 7%. Il semble que considérer une résistance plastique totale de l'ouverture amène forcément des possibles écarts insécuritaires de valeurs de charge ultime entre la théorie et le modèle élément finis, ce qui rejoint les observations faites en deuxième partie §2.1.

Ces écarts peuvent être liés, soit au fait que la ruine n'est pas exactement une ruine avec 4 rotules plastiques, soit cet écart est simplement lié à la différence d'environ 5% entre l'analytique et le numérique pour le calcul de la résistance plastique des sections en I ou en Té. Par contre, la valeur théorique reste largement sécuritaire par rapport à la valeur expérimentale. C'est la raison pour laquelle, dans le but de justifier cette approche analytique, nous choisissons de nous rapporter à une étude détaillée des contraintes autour de l'ouverture. Une première étude qui consiste à analyser la résistance ultime d'ouvertures sinusoïdales en fonction du mode de ruine pour diverses configurations géométriques.

3. RESISTANCES ULTIMES ET MODES DE RUINE POUR DIVERSES FORMES D'OUVERTURES SINUSOÏDALES

Plusieurs modélisations ont été effectuées sur différentes formes géométriques d'ouverture. A partir d'un profilé IPE 500, nous avons choisi d'étudier différentes configurations d'ouvertures

sinusoïdales au travers des paramètres adimensionnels a_0/H_{tot} (hauteur d'ouverture/hauteur poutre) et w/L_0 (largeur montant/longueur d'ouverture)¹⁰. Le **Tableau V-4** présente les dimensions des différentes configurations étudiées avec l'élancement des sections en té au droit de l'ouverture (c/t).

a_0/H_{TOT}	w/L_0	a_0 (mm)	w (mm)	l_s (mm)	L (m)	c/t
0,6	0,3	428	484	565	14	10,89
0,6	0,4	428	400	300	10	10,89
0,65	0,3	481	484	565	14	9,59
0,7	0,2	538	282	565	10,5	8,19
0,7	0,3	538	484	565	14	8,19
0,75	0,1	600	200	900	14	6,68
0,8	0,1	666	125	565	9,5	5,05
0,8	0,2	666	282	565	10,5	5,05
0,8	0,3	666	484	565	14	5,05
0,5	0,3	333	484	565	14	13,22

Tableau V-4 Récapitulatif des configurations modélisées

Il s'agit à partir de ces modélisations d'étudier le mode de ruine, l'effort ultime et les efforts analytiques. Deux méthodes de calcul d'effort ultime sont comparées. La première considère l'effort minimal d'instabilité ou de plastification entre les 4 parties de l'ouverture : $F_{inc,min}$ ¹¹. La seconde considère la moyenne des efforts ultimes plastiques des 4 quarts d'ouverture : $F_{pl,rect}$. Le **Tableau V-5** présente les principaux résultats de cette étude.

L'observation des modes de ruine est résumée dans le **Tableau V-5**. Un mode élastoplastique correspond à une ruine de l'ouverture qui combine instabilités locales et rotules plastiques. Un mode dit de plastification correspond à la formation de 4 rotules plastiques.

Cas étudiés	Mode de ruine MEF	$F_{ult.}$ MEF(kN)	$F_{inc,min}(kN)$	$F_{pl,rect}(kN)$	Ecart = $F_{pl,rect}/F_{MEF}$
0,6_0,3	élasto- plastique	241,7	126	241	0,997
0,6_0,4	élasto- plastique	324,85	170	319	0,982
0,65_0,3	élasto- plastique	230,67	124	231	1,001
0,7_0,2	plastique	289,91	312	312	1,076
0,7_0,3	plastique	209,3	128	215	1,027
0,75_0,1	élasto- plastique	217,17	138	241	1,110
0,8_0,1	plastique	274,45	226	322	1,173
0,8_0,2	plastique	197	184	222	1,127

¹⁰ Un rapport de hauteur d'ouverture sur hauteur de poutre tel que $a_0/H_{tot} = 0,8$ correspond à une taille d'ouverture maximale pour ce profilé (limite de conception de poutre AngelinaTM proposée par le CTICM).

¹¹ Ce modèle considère la résistance minimale des 4 quarts d'ouverture en considérant les développements proposés en quatrième partie

0,8_0,3	plastique	136	124	147	1,081
0,5_0,3	élasto- plastique	244,63	128	249	1,018

Tableau V-5 Résultats des différents cas étudiés et comparaisons entre MEF et analytique

Le **Tableau V-5** montre que le mode de ruine par formation de 4 rotules plastique dépend majoritairement de deux paramètres géométriques adimensionnels (en excluant l'influence de la limite élastique). Il apparaît que la ruine par formation de 4 rotules plastiques s'établit pour des configurations d'ouvertures avec une hauteur d'ouverture importante et une longueur de sinusoïde faible par rapport à la largeur de montant.

Il apparaît que peu de cas étudiés ont une formation de 4 rotules plastiques. La présence d'une instabilité locale dans la sinusoïde apparaît dans un nombre de cas majoritaire. Le calcul analytique de résistance plastique d'un cadre hyperstatique ($F_{pl,rect}$) au cas d'une ouverture sinusoïdale ne devrait donc être adapté qu'aux cas de ruines plastique. Cependant, les résultats obtenus montrent clairement un certain paradoxe entre les observations numériques et les écarts de charge ultime entre les résultats numériques (F_{MEF}) et ceux fournis par la méthode analytique plastique ($F_{pl,rect}$). En effet, les écarts insécuritaires les plus importants sont obtenus pour des configurations d'ouvertures pour lesquelles nous avons identifié un mode de ruine similaire à celui d'une ouverture rectangulaire.

De plus, dans le cas de ruine survenant avant la plastification de l'ouverture, les efforts ultimes sont supérieurs aux efforts analytiques nécessaires à la plastification de l'ouverture. Afin de mieux comprendre l'origine de ces différences, une petite étude complémentaire est présentée dans le paragraphe suivant. Cette étude compare les modèles MEF de poutre cellulaire à ouverture sinusoïdale, ouverture rectangulaire équivalente et ouverture hexagonale.

4. COMPARAISON ENTRE OUVERTURES SINUSOÏDALE, RECTANGULAIRE ET HEXAGONALE

Le **Tableau V-5** a montré que les ouvertures ayant une forme de ruine de type ouverture rectangulaire ont cependant un effort ultime inférieur à l'effort ultime théorique de plastification complète de l'ouverture. Par contre, dans les cas de petites ouvertures, l'étude des contraintes montre une ruine sans qu'il y ait la formation des 4 rotules plastiques, du fait d'instabilités locales des parois comprimées. Cependant l'effort ultime est plus proche de l'effort plastique théorique et parfois même supérieur.

La comparaison du comportement entre une ouverture sinusoïdale et une ouverture rectangulaire ou hexagonale équivalente permet de confirmer la bonne concordance de ces écarts. La **Figure V-6** présente les diagrammes de moment résistant plastique et de moment Vierendeel sollicitant pour les deux configurations de sollicitation et de résistance de quart d'ouverture.

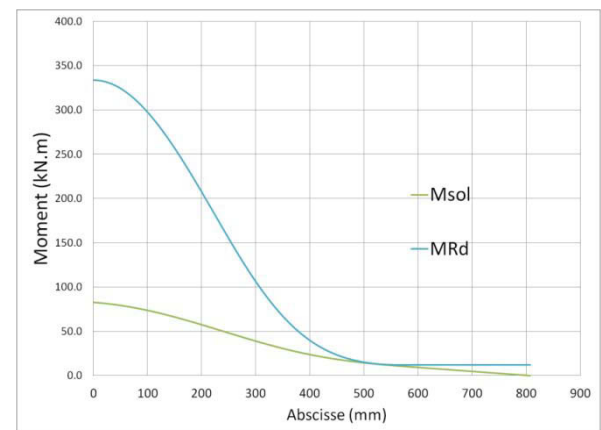
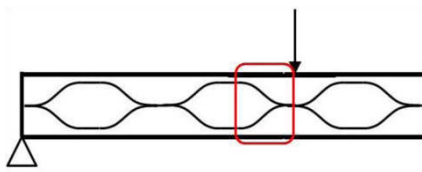
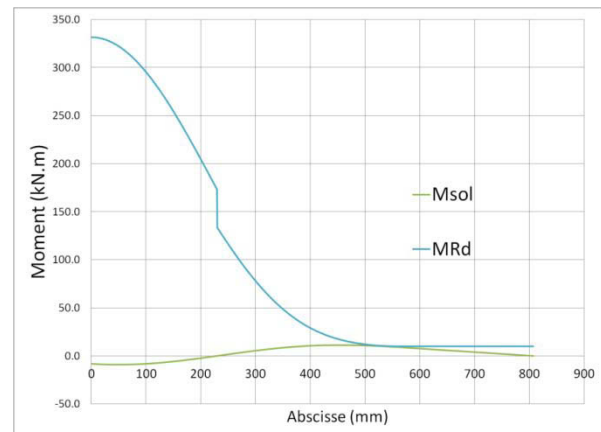
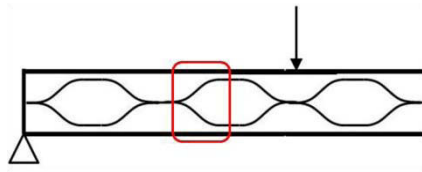


Figure V-6 Diagrammes de moment résistant plastique et moment sollicitant Vierendeel pour les quarts d'ouverture correspondants

Remarque : Nous pouvons remarquer sur le diagramme en haut de la **Figure V-6**, un saut de moment résistant. Ce saut de moment provient du changement de signe du moment sollicitant. Ce changement de signe implique un changement de position du point de moment résistant des sections en té concernées sur le diagramme d'interaction M-N, car ces sections se retrouvent ainsi avec une interaction M-N parabolique. Le changement de signe du moment sollicitant est dû au moment secondaire lié à l'excentrement de l'effort axial avec le centre de gravité des sections concernées.

La **Figure V-6** montre que l'intersection du diagramme moment sollicitant avec le diagramme de moment résistant plastique s'effectue toujours au coin de l'ouverture (au départ de la sinusoïde). Par conséquent la ruine plastique d'une ouverture sinusoïdale correspond à une ruine plastique d'une ouverture rectangulaire de même hauteur et de longueur approximativement égale à la partie droite de l'ouverture sinusoïdale (w) comme illustré à la **Figure V-7**.

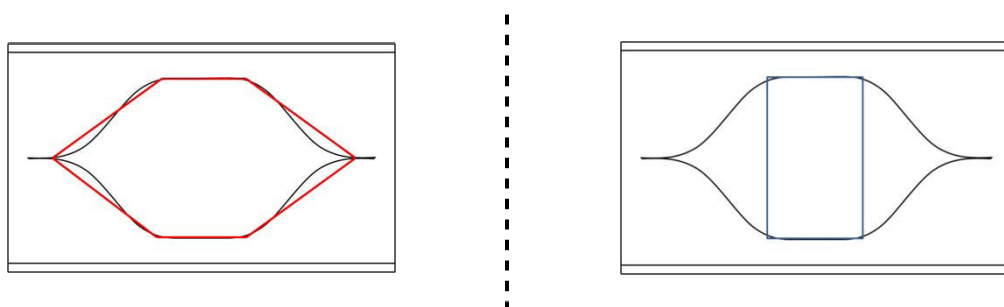


Figure V-7 Illustration des modèles d'ouverture hexagonale et rectangulaire équivalentes

Même si la forme sinusoïdale est moins rigide que l'ouverture rectangulaire équivalente, la comparaison des efforts ultimes entre les différents modèles d'ouverture permettrait de situer la résistance de l'ouverture sinusoïdale par rapport à une résistance d'ouverture rectangulaire (pour laquelle la résistance plastique analytique est représentée par la méthode analytique de cadre hyperstatique).

Nous avons choisi d'effectuer cette comparaison pour deux configurations d'ouvertures distinctes, d'une part pour une configuration d'ouverture similaire au cas 0,6_0,3 et d'autre part similaire au cas 0,8_0,3¹² du **Tableau V-4**. Les diagrammes présentés sur les **Figure V-8** et **Figure V-9** donnent la comparaison des courbes force-déplacement de ces deux configurations d'ouverture sinusoïdale et les comparent avec les diagrammes des ouvertures rectangulaires et hexagonales correspondantes.

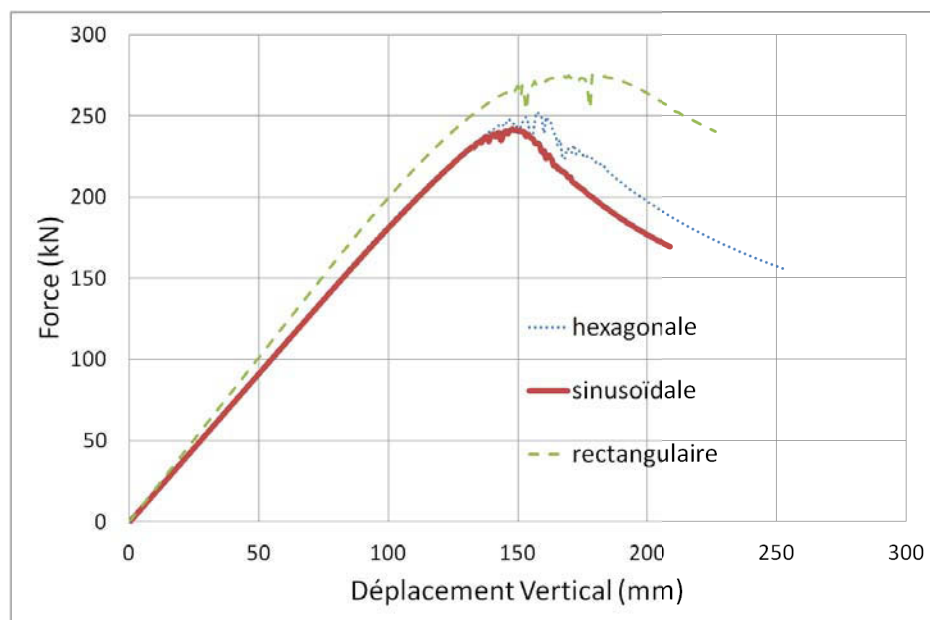


Figure V-8 Comparaison ouverture sinusoïdale/rectangulaire/hexagonale pour le cas 0,6_0,3

¹² 0,6_0,3 correspond à une ouverture telle que $a_0/H_{tot}=0,6$ et $w/L_0=0,3$.
0,8_0,3 correspond à une ouverture telle que $a_0/H_{tot}=0,8$ et $w/L_0=0,3$.

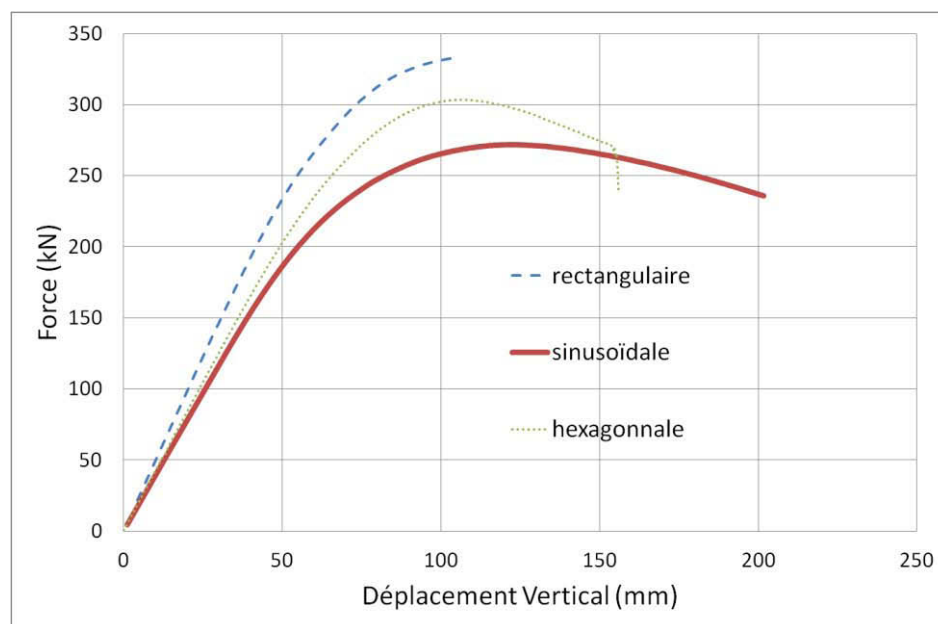


Figure V-9 Comparaison ouverture sinusoïdale/rectangulaire/hexagonale pour le cas 0,8_0,3

Ces trois formes d'ouverture (sinusoïdale, rectangulaire et hexagonale) ont une position de section critique identique. Analytiquement, la résistance et les sollicitations de chaque section, aux 4 coins de l'ouverture, est approximativement identique. Par conséquent, indépendamment de la rigidité des poutres, les courbes devraient atteindre un effort ultime similaire. Mais il peut être observé sur les graphes donnés **Figure V-8** et **Figure V-9** que les courbes donnent des résultats très différents de la théorie.

Le **Tableau V-6** compare l'effort de plastification théorique avec l'effort ultime MEF obtenu pour les trois formes d'ouvertures appliquées aux deux configurations d'ouverture 0,6_0,3 et 0,8_0,3.

Poutre	Fult MEF (kN)	Fult plastique (kN)	Ecart : Plastique/MEF
Sinus. 0,6_0,3	241,7	241	0,997
Hex. 0,6_0,3	251,97	250.5	0,99
Rect. 0,6_0,3	275,11	255.8	0,93
Sinus. 0,8_0,3	136,0	147	1,08
Hex. 0,8_0,3	151,86	159.2	1.04
Rect. 0,8_0,3	166,53	159.2	0,96

Tableau V-6 Résumé des résultats d'étude comparative des formes d'ouverture

Les efforts ultimes analytiques plastiques peuvent être différents entre les ouvertures sinusoïdales, rectangulaires et hexagonales. En effet, la section critique peut être légèrement différente suivant les formes d'ouverture, notamment pour la forme sinusoïdale, pour laquelle la position du coin d'ouverture est moins triviale que pour l'ouverture rectangulaire.

Nous pouvons observer que les résultats sont différents suivant la taille de l'ouverture. Les résultats concordent avec les observations faites précédemment. L'ouverture de taille minimale a un comportement et un effort ultime plus proche de l'ouverture rectangulaire que la poutre avec une taille importante d'ouverture. Ainsi, malgré le fait que la poutre avec une configuration d'ouverture de 0,6_0,3 ait une instabilité locale dans la sinusoïde (qui empêche la plastification totale de l'ouverture), l'effort ultime est très proche de celui de l'ouverture rectangulaire équivalente. A contrario, l'ouverture 0,8_0,3 qui a montré une ruine similaire à une ouverture rectangulaire (avec la formation des 4 rotules plastiques), a une courbe force-déplacement et un effort ultime MEF très différent de son homologue avec ouverture rectangulaire ou hexagonale.

La confrontation de la forme d'ouverture sinusoïdale et hexagonale permet de mettre en évidence que l'ouverture hexagonale a un comportement intermédiaire entre l'ouverture rectangulaire et sinusoïdale avec un effort ultime dans les deux cas proche de celui de l'ouverture rectangulaire.

Nous pouvons observer que la méthode analytique de calcul de plastification complète de l'ouverture est bien adaptée à l'ouverture rectangulaire et hexagonale mais peut sembler moins bien adaptée au cas d'ouverture sinusoïdale (car cette méthode ne tient pas compte des éventuelles instabilités).

Enfin il semble que pour les petites ouvertures, la résistance est proche de la résistance plastique de l'ouverture rectangulaire équivalente, malgré la présence d'instabilités locales. Afin de mieux comprendre ces écarts de résultats, une étude approfondie doit être menée en considérant non plus uniquement le comportement discret de chaque partie de l'ouverture mais en considérant aussi l'ouverture dans sa globalité.

5. BILAN

Les comparaisons des modèles d'ouvertures sinusoïdales et rectangulaires équivalentes donnent des résultats assez concordants avec les comparaisons d'efforts ultimes du **Tableau V-5**. Il apparaît que l'analogie avec les ouvertures rectangulaires n'est pas aisée car les ouvertures ayant les modes les plus proches de l'ouverture rectangulaire ont des comportements force-déplacement très éloignés de ceux observés sur l'ouverture rectangulaire équivalente.

L'étude théorique précédente, d'un cadre hyperstatique en console, a permis de vérifier que ce modèle de cadre a une répartition d'effort similaire à un cadre de poutre échelle. De plus l'avantage de ce modèle est qu'il donne une méthode théorique fiable pour la vérification à l'état ultime d'ouvertures rectangulaires. L'établissement d'un nouveau modèle d'étude d'une ouverture seule en console permet ainsi de retrouver une ouverture sinusoïdale avec des sollicitations proches de la réalité d'une poutre cellulaire tout en maîtrisant les répartitions d'efforts dans les différentes membrures. Cette proximité entre le modèle théorique de cadre hyperstatique en console et celui de l'ouverture isolée permet une meilleure analyse du modèle numérique et une meilleure critique des

différentes propositions de modèle analytique. Ce nouvel échantillon d'ouverture isolée est décrit à la **Figure V-10**.

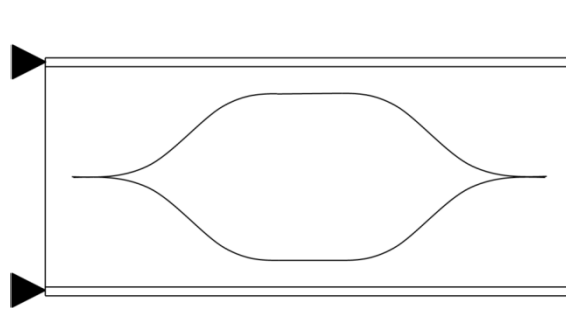


Figure V-10 Nouveau modèle d'étude d'ouverture isolée

Ce nouveau modèle d'échantillon a pour objectif l'étude détaillée de la ruine des 4 quarts d'ouverture en étudiant une répartition précise des efforts et permet d'éviter d'éventuelles redistributions d'efforts entre ouvertures.

6. ANALYSE DU MODELE OUVERTURE ISOLEE

La présentation du nouveau modèle géométrique étudié ainsi que la distribution des efforts, approximée analytiquement (suivant les calculs effectués sur un cadre hyperstatique), est donnée par la **Figure V-11**.

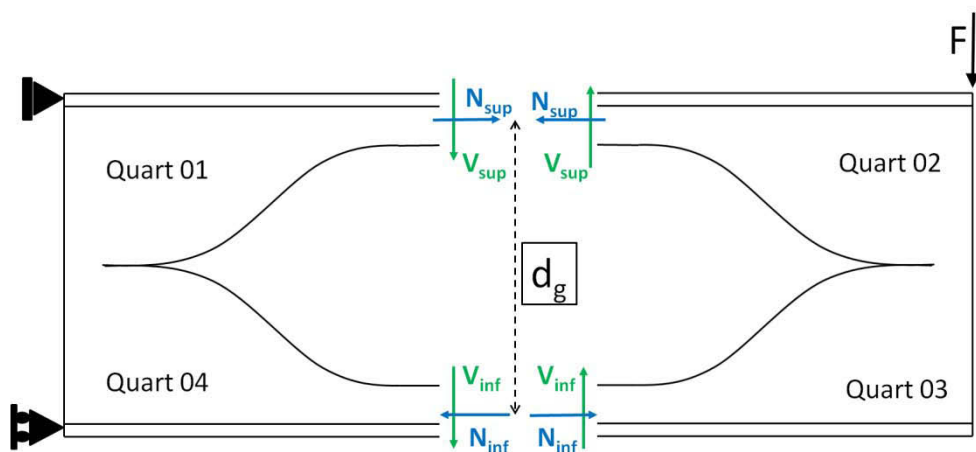


Figure V-11 Modèle d'ouverture seule en console

6.1. Comparaison analytique/numérique

Ce paragraphe vise à comparer les résultats numériques avec les différents résultats analytiques afin de vérifier la bonne applicabilité du modèle présenté précédemment à cet

échantillon. Cette étude permettra ainsi de mieux appréhender les problèmes de correspondance entre la théorie et les résultats numériques.

Dans la configuration de chargement décrite **Figure V-11**, les deux parties de l'ouverture qui peuvent être soumises à une forme d'instabilité sont les quarts d'ouverture 01 et 03, ces deux parties ont les fibres de l'âme en bord libre qui sont comprimées par flexion Vierendeel. En revanche, le quart d'ouverture 01 est tendu par effort axial ce qui implique une interaction M-N plus favorable que celle du quart inférieur 03 dont les fibres en bord libre cumulent la compression par flexion locale et effort axial.

Il peut déjà être anticipé que le mode de ruine de l'ouverture soit légèrement différent de celui de la même ouverture en configuration de poutre globale. Malgré que l'effort tranchant sollicitant puisse être similaire, l'effort axial dans les membrures est beaucoup plus faible du fait que le moment fléchissant global soit très faible. De ce fait les sollicitations du quart d'ouverture 03 (qui correspond au quart supérieur gauche des études précédentes) changent. La réduction du moment fléchissant local sur la longueur du quart d'ouverture par excentrement de l'effort axial ne réduit que de manière négligeable le moment sollicitant sur la longueur du quart d'ouverture. Ainsi le diagramme de moment sollicitant est très similaire entre les deux quarts d'ouverture 01 et 03 comme en témoigne les **Figure V-12** et **Figure V-13**.

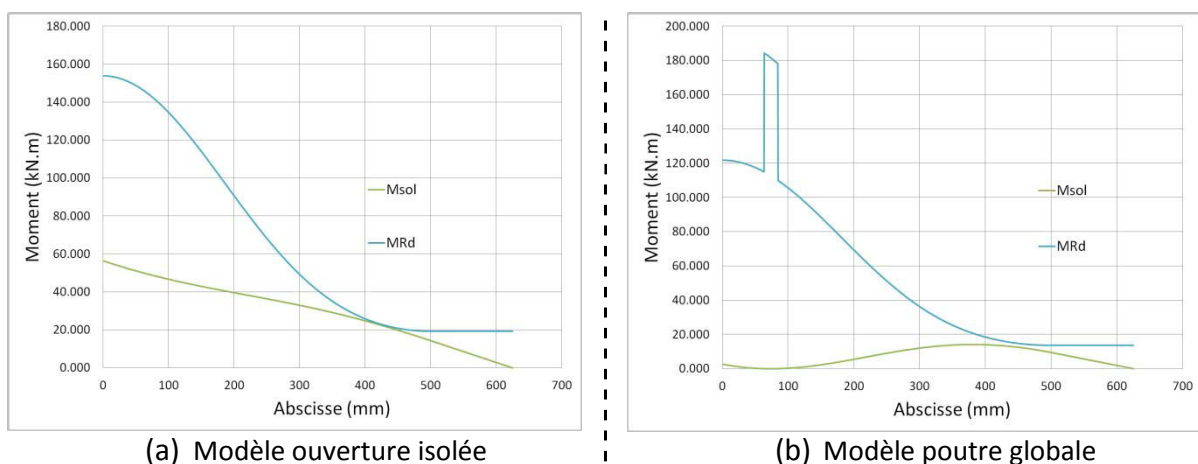


Figure V-12 Diagramme de moment sollicitant et résistant plastique pour le quart 03 dans les modèles d'ouverture isolée (a) et de poutre globale(b)

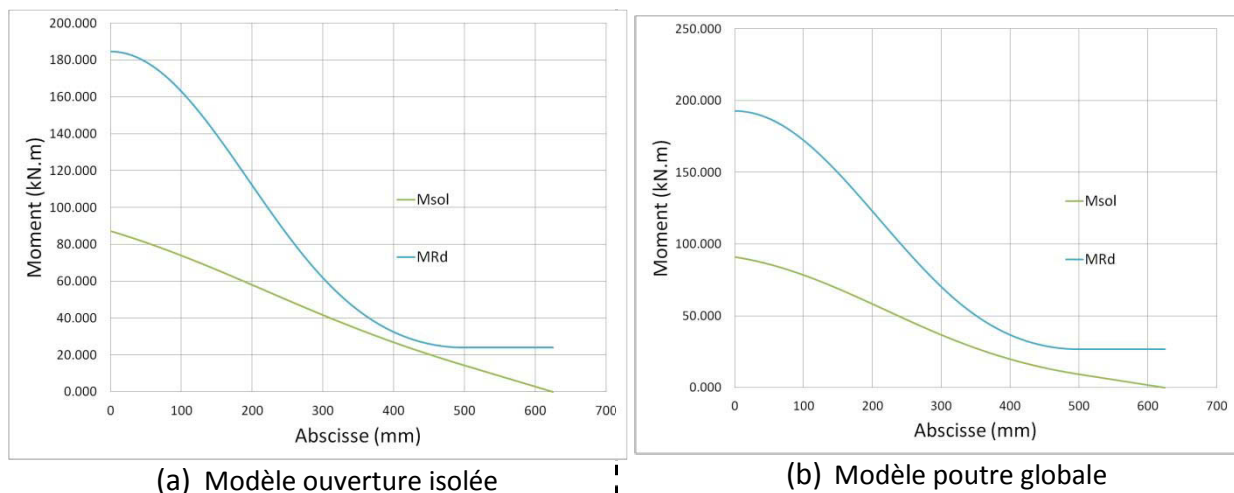


Figure V-13 Diagramme de moment sollicitant et résistant plastique pour le quart 01 dans les modèles d'ouverture isolée (a) et de poutre globale (b)

Par conséquent, la zone d'instabilité dans les deux quarts d'ouverture 01 et 03 sera similaire (ce qui n'était bien évidemment pas le cas pour la poutre globale). Numériquement on retrouve bien cette apparente symétrie de comportement.

L'exemple présenté ci-dessous reprend une configuration géométrique d'ouverture identique aux ouvertures de la poutre testée AS012. Il peut être observé une instabilité élastique des quarts 01 et 03 et une plastification des quarts 02 et 04 (voir **Figure V-14**).

Remarque :

Le saut de moment résistant de la **Figure V-12 (b)** est lié au changement de signe du moment sollicitant. Ce changement de signe du moment sollicitant implique que les sections considérées ont des moments résistants situés dans une partie différente du diagramme d'interaction M-N que les autres sections sur la longueur du quart d'ouverture (voir **Figure V-2**).

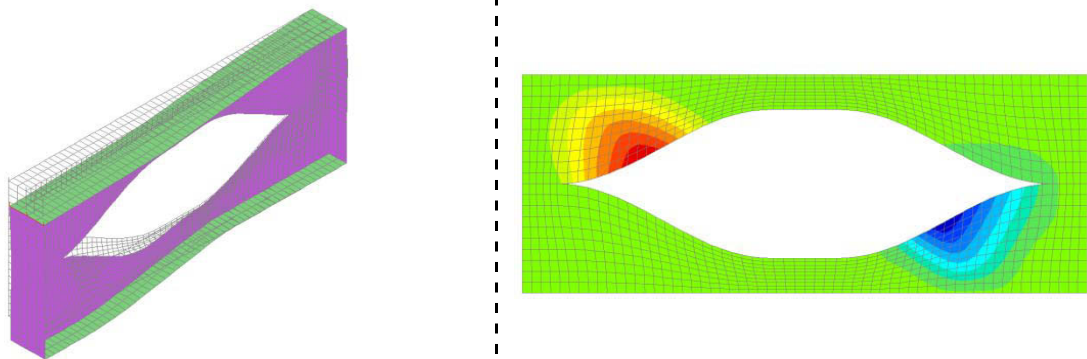


Figure V-14 Illustration de la déformée vue de côté et des iso-déplacements hors plan (à droite)

Le **Tableau V-7** présente les efforts ultimes analytiques pour chaque quart d'ouverture pris séparément. Il donne pour chaque quart d'ouverture l'effort F_{inc} , qui correspond à la vérification incrémentale des différents quarts d'ouverture en considérant le modèle que nous avons développé en quatrième partie. Puis il donne aussi l'effort plastique de chaque quart d'ouverture, F_{pl} . Cet effort est obtenu par calcul incrémental en considérant toujours une résistance plastique des sections de chaque quart d'ouverture. Ce tableau permet donc de comparer les résistances analytiques des différents quarts d'ouverture suivant que l'on considère ou non la présence d'éventuelles instabilités.

Par exemple pour le quart 03, F_{inc} donne l'effort analytique pour lequel le quart d'ouverture ruine par instabilité. Tandis que F_{pl} donne l'effort correspondant à la formation d'une rotule plastique dans ce même quart indépendamment des autres.

Quart	F_{inc} [kN]	F_{pl} [kN]
01	162	378
02	378	378
03	163	308
04	308	308

Tableau V-7 Résumé des efforts ultimes pour chaque quart d'ouverture

L'effort ultime obtenu numériquement est $F_{MEF} = 259,18 \text{ kN}$. En se basant sur l'étude analytique d'un cadre hyperstatique, la **résistance plastique** de l'ouverture s'écrit :

$$F_{ult.} = (F_{pl,min} + F_{pl,max})/2 = (378 + 308)/2 = 343 \text{ kN}$$

Cette valeur est bien supérieure à la réalité numérique. Il apparaît donc que la résistance ultime de cette ouverture ne peut évidemment pas être considérée comme plastique. L'étude numérique permet d'identifier l'existence d'instabilités locales pouvant réduire la résistance de l'ouverture.

Nous proposons d'évaluer la pertinence d'une méthode simplifiée consistant à considérer simplement l'effort plastique minimal entre les différents quarts d'ouverture. Cette hypothèse amène donc à un effort ultime analytique : $F_{pl,min} = 308 \text{ kN}$. De la même façon, il peut être clairement identifié que la résistance ultime analytique déduite de l'effort plastique minimal des quarts d'ouverture est supérieure à la résistance MEF de l'ouverture. Cet effort plastique minimal peut donc s'avérer insécuritaire par rapport aux résultats numériques.

L'étude précédente du cadre hyperstatique nous a permis de montrer que pour caractériser l'effort ultime d'un cadre hyperstatique, il est suffisant de considérer la moyenne des état finaux de chacun des quarts d'ouverture sans considérer le changement d'état après la formation des premières rotules. De ce fait, l'effort ultime qui peut se déduire de l'analyse purement incrémentale basée sur le modèle analytique développé au cours de cette thèse amène :

$$F_{ult.} = (F_{inc,01} + F_{inc,02} + F_{inc,03} + F_{inc,04})/4 = (162 + 378 + 163 + 308)/4 = 252,75 \text{ kN}$$

Cet exemple montre que le modèle analytique de vérification de chaque quart d'ouverture de manière incrémental combiné au principe de comportement d'un cadre hyperstatique donne un résultat fiable. Il reste à vérifier que ce modèle est représentatif de la réalité en étudiant l'état de contrainte et les éventuelles instabilités autour de l'ouverture. Puis seule une étude paramétrique permettrait de valider l'approche proposée.

Nous constatons que les deux quarts d'ouverture qui sont majoritairement en traction ont un effort ultime incrémental égal à l'effort plastique. Cela laisse donc présager que l'étude des contraintes autour de ces deux quarts d'ouverture montre la formation de rotules plastiques dans les quarts d'ouverture 02 et 04. Ensuite l'observation des déformées et particulièrement des iso-déplacements hors plan présente l'existence d'instabilité dans les deux quarts d'ouverture 01 et 03. Il s'agit donc tout d'abord d'étudier plus en détail l'état de contrainte dans chaque partie de l'ouverture et de caractériser l'état ultime de chaque partie constituant l'échantillon.

6.2. Etude numérique du modèle d'ouverture isolée

Le modèle numérique de l'ouverture considérée **Figure V-11** (correspondant aux configurations géométriques de la poutre testée AS012) donne un effort ultime $F_{MEF} = 259,18 \text{ kN}$. La **Figure V-15** présente le diagramme force-déplacement vertical de l'échantillon d'ouverture. Le déplacement vertical équivalent à l'effort ultime est approximativement 18mm.

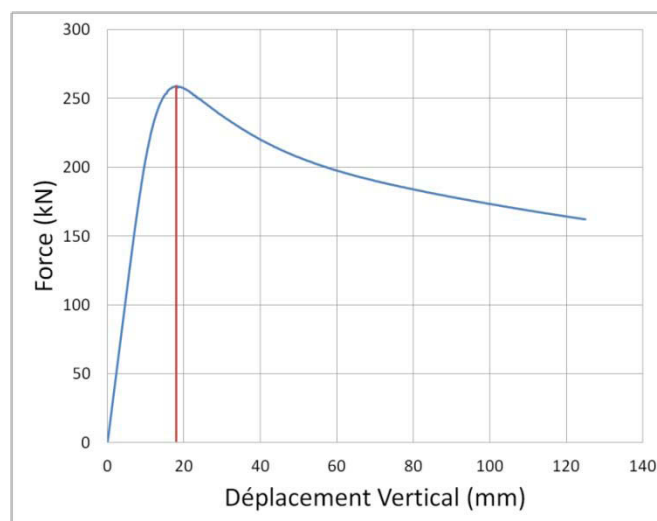


Figure V-15 Diagramme force-déplacement de l'échantillon d'ouverture

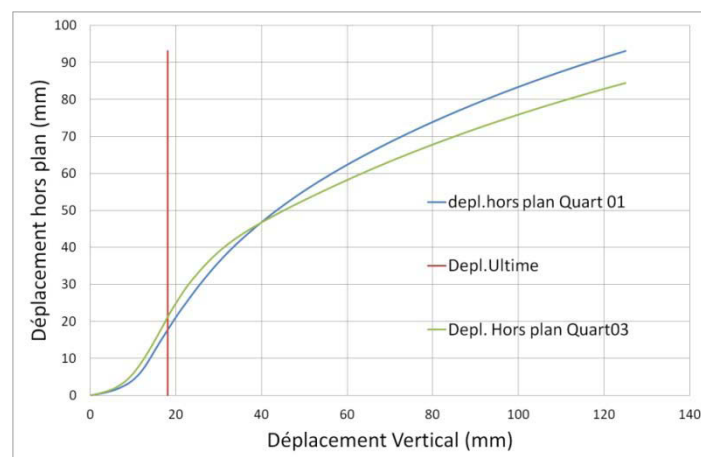


Figure V-16 Comparaison du déplacement hors plan maxi dans les quarts d'ouverture 01 et 03

La **Figure V-16** présente les déplacements hors plan des éléments en bord libre des sections critiques des quarts d'ouverture 01 et 03, repérées grâce aux iso-déplacements (voir **Figure V-14**). Ce diagramme permet de clairement visualiser le comportement similaire des deux quarts d'ouverture 01 et 03 caractéristiques d'une éventuelle instabilité locale de l'âme.

L'étude des contraintes sur la hauteur des sections verticales repérées par ces deux nœuds donne des résultats caractéristiques d'une forme d'instabilité locale. Les contraintes repartent par les éléments en extrémité de section chutent avant d'atteindre la limite élastique (460 MPa), comme en témoigne les figures ci-dessous.

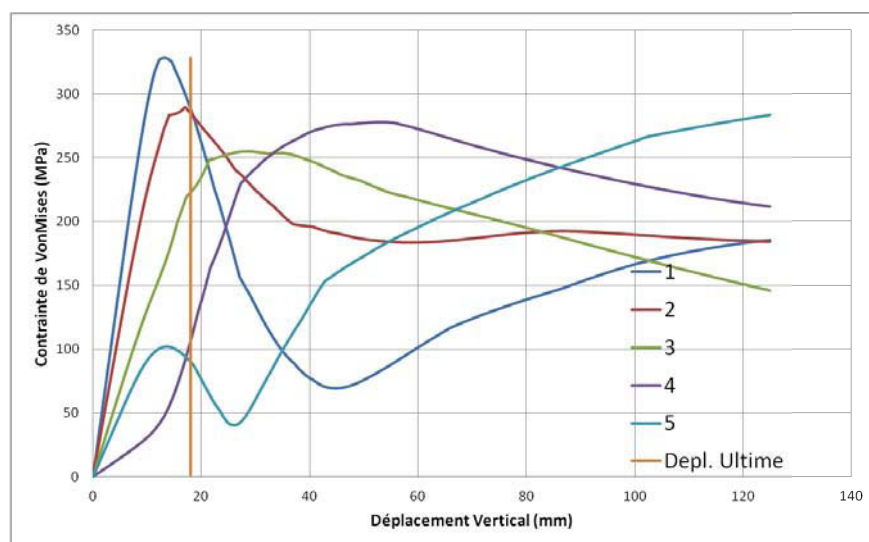


Figure V-17 Evolution des contraintes sur la hauteur de la section critique du quart 01

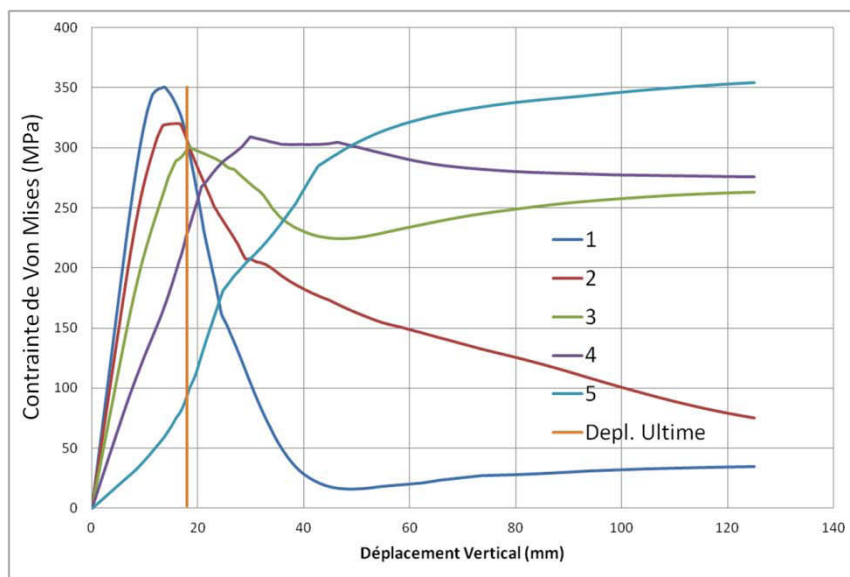


Figure V-18 Evolution des contraintes sur la hauteur de la section critique du quart 03

Sur les deux figures précédentes (**Figure V-17** et **Figure V-18**), il peut être observé une chute de contrainte précédant la ruine de l'ouverture concordant avec l'augmentation du déplacement hors plan des nœuds correspondant. En revanche, sur les deux autres quarts d'ouverture, l'étude des contraintes au niveau des sections critiques montre une nette plastification des quarts d'ouverture 02 et 04.

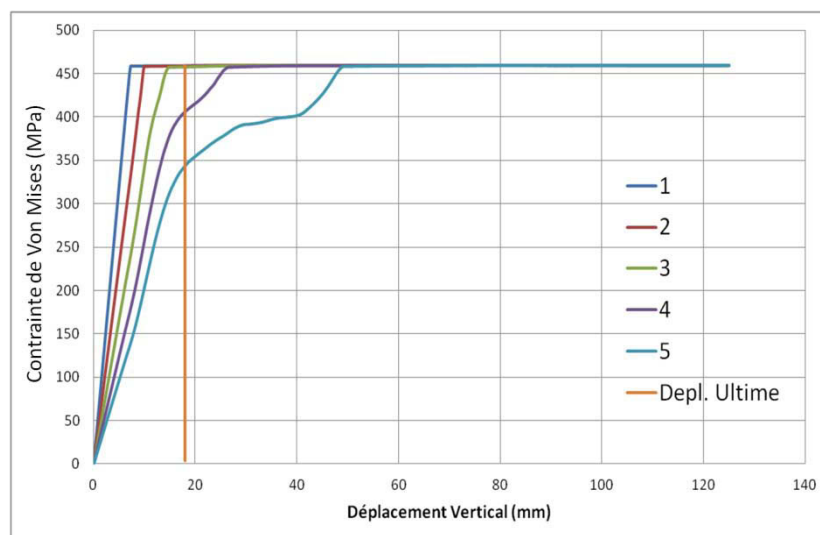


Figure V-19 Evolution des contraintes sur la hauteur de la section critique du quart 02

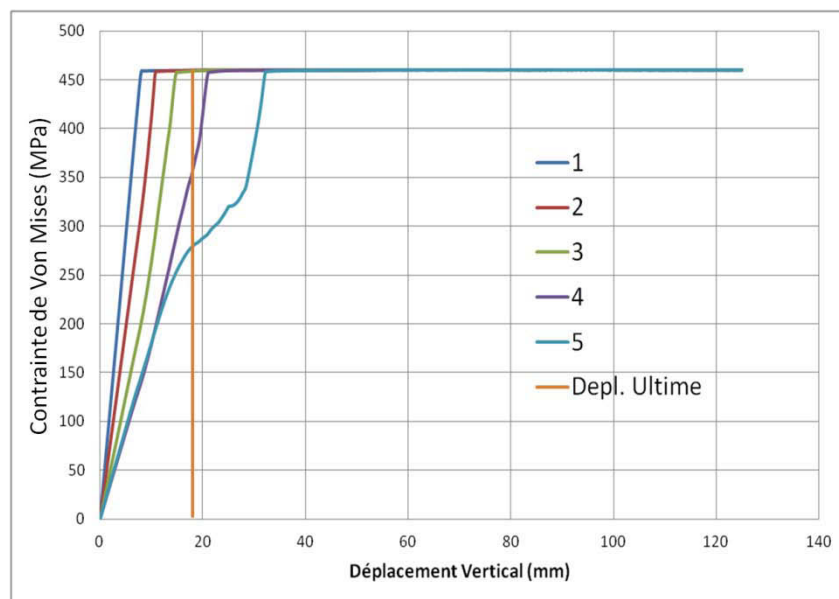


Figure V-20 Evolution des contraintes sur la hauteur de la section critique du quart 04

Le modèle numérique a permis de valider les états de ruine de chaque partie de l'ouverture. Il peut être constaté que l'état ultime correspond de manière très proche avec ce que le modèle analytique incrémental avait prévu qualitativement et quantitativement.

Afin de vérifier la bonne concordance du modèle analytique sur ce modèle d'étude d'ouverture seule, il est proposé d'étudier le même modèle appliqué à la configuration de poutre AS016 et AS018. L'application aux deux autres configurations de poutres testées est détaillée dans l'Annexe F.

6.3. Bilan

Les premières études du modèle d'ouverture isolée ont permis d'évaluer la pertinence d'un modèle analytique qui considère la résistance de l'ouverture dans sa globalité. Il a permis de justifier que la résistance d'une ouverture de petite taille soumise à instabilité est relativement écartée de sa résistance plastique et que le modèle analytique de calcul incrémental combiné avec l'étude de ruine d'un cadre permet d'obtenir un résultat de charge ultime analytique bien plus réaliste que celle fournie par le premier modèle analytique (qui considère seulement la plus faible résistance des quarts d'ouverture) et par un modèle de résistance plastique.

De plus, si le modèle analytique permet de caractériser correctement la résistance de l'échantillon d'une ouverture isolée, le comportement en situation de poutre globale reste différent. Notamment il a pu être observé que les configurations de poutre munies de petites ouvertures peuvent avoir une résistance globale supérieure à la résistance plastique de l'ouverture critique malgré la présence d'instabilités locales (voir **Tableau V-5**). Il se pose donc la question d'une éventuelle capacité de redistribution d'efforts non seulement entre les membrures d'une même ouverture mais aussi entre les ouvertures. Il pourra ainsi être vérifié, dans la dernière partie validant le modèle analytique, que les plus gros écarts (conservatifs) seront obtenus pour des cas

d'ouvertures de petites tailles du fait non pas d'une plus grande résistance de l'ouverture critique mais d'une réserve de résistance post-critique probablement liée à une redistribution d'efforts entre ouvertures.

Nous proposons donc d'appliquer, au modèle de poutre globale, l'approche dite de cadre, en combinant les résistances des 4 quarts de l'ouverture critique pour déterminer la résistance ultime de la poutre. Le paragraphe suivant présente une étude comparative entre la méthode analytique que nous proposons et les résultats MEF pour plusieurs configurations de poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales.

7. VALIDATION DU MODELE ANALYTIQUE

Malgré que les ruines des quatre parties de l'ouverture soient différentes, l'état ultime d'une ouverture reste similaire à un cadre hyperstatique et correspond à la ruine des différentes parties de ce cadre. L'adaptation du modèle analytique de vérification d'un cadre s'applique donc de telle façon que l'effort ultime de l'ouverture sinusoïdale est définie comme la moyenne des efforts ultimes des différentes parties de l'ouverture.

Cette dernière méthode permet ainsi de combiner les travaux effectués sur la caractérisation de la résistance d'un quart d'ouverture isolé et d'une ouverture dans sa globalité. Nous présentons, pour les différentes configurations de poutres modélisées, les résultats de charges ultimes obtenues avec les différentes approches analytiques présentées tout au long de ce travail. Les efforts ultimes analytiques de chaque poutre se basent sur les valeurs des efforts ultimes de chaque quart d'ouverture : F1, F2, F3 et F4.

Les tableaux suivants présentent les efforts ultimes et les comparaisons avec les résultats numériques. Différentes approches analytiques sont comparées afin de justifier de la pertinence du modèle que nous avons développé. Ces différentes approches sont résumées ci-dessous :

- $F_{inc,min}$: Effort ultime en considérant que la ruine de la poutre est liée à la ruine du quart d'ouverture de plus faible résistance :

$$F_{inc,min} = \min(F1 ; F2 ; F3 ; F4)$$

- $F_{ult,inc}$: Effort ultime qui combine les résistances analytiques de chaque quart d'ouverture :

$$F_{ult,inc} = (F1 + F2 + F3 + F4) / 4$$

- L'effort $F_{pl,min}$ correspond à l'effort plastique minimal des quarts d'ouverture :

$$F_{pl,min} = \min(F2 ; F4)$$

- $F_{pl,rect}$: Effort ultime en considérant une résistance plastique totale de l'ouverture :

$$F_{pl,rect} = (F_2 + F_4)/2$$

- L'effort F_{MEF} correspond à l'effort ultime obtenu à l'aide du modèle aux éléments finis.

	AS012	AS016	AS018
F1 (kN)	150	104	85
F2 (kN)	308	148	171
F3 (kN)	174	132	111
F4 (kN)	222	104	142
F_{inc,min}(kN)	150	104	85
F_{ult,inc}(kN)	213,5	122	254,5
F_{pl,min}(kN)	222	104	284
F_{pl,rect}(kN)	265	126	313
F_{MEF}(kN)	243,05	116,5	294,18
Ecart F_{MEF}/F_{ult,inc}	1,14	0,95	1,16

Tableau V-8 Résumé des efforts ultimes pour les poutres testées

Cas	Dénomination	F _{MEF}	F1	F2	F3	F4
1	0,6_0,3	241,7	126	284	168	198
2	0,7_0,2	289,91	178	374	212	250
3	0,8_0,1	274,45	246	374	226	270
4	0,6_0,4	324,85	170	382	234	256
7	0,75_0,1	217,17	152	280	38	202
8	0,65_0,3	230,67	124	278	160	184
9	0,7_0,3	209,3	128	264	152	168
10	0,8_0,2	197	184	258	192	188
11	0,8_0,3	136	124	170	142	124
12	0,5_0,3	244,63	128	284	178	216
13	0,8_0,15	216,75	210	312	200	218

Tableau V-9 Résumé des efforts ultime de chaque quart d'ouverture

Cas	Dénomination	F _{MEF}	F _{pl,rect}	F _{pl,min}	F _{inc,min}	F _{ult,inc}
1	0,6_0,3	241,7	241	198	126	194
2	0,7_0,2	289,91	312	250	178	253,5
3	0,8_0,1	274,45	322	270	226	279
4	0,6_0,4	324,85	319	256	170	260,5
7	0,75_0,1	217,17	241	202	38	168
8	0,65_0,3	230,67	231	184	124	186,5
9	0,7_0,3	209,3	216	168	128	178
10	0,8_0,2	197	223	188	184	205,5
11	0,8_0,3	136	147	124	124	140

12	0,5_0,3	244,63	250	216	128	201,5
13	0,8_0,15	216,75	265	218	200	235

Tableau V-10 Résumé des efforts ultime de chaque quart d'ouverture(kN)

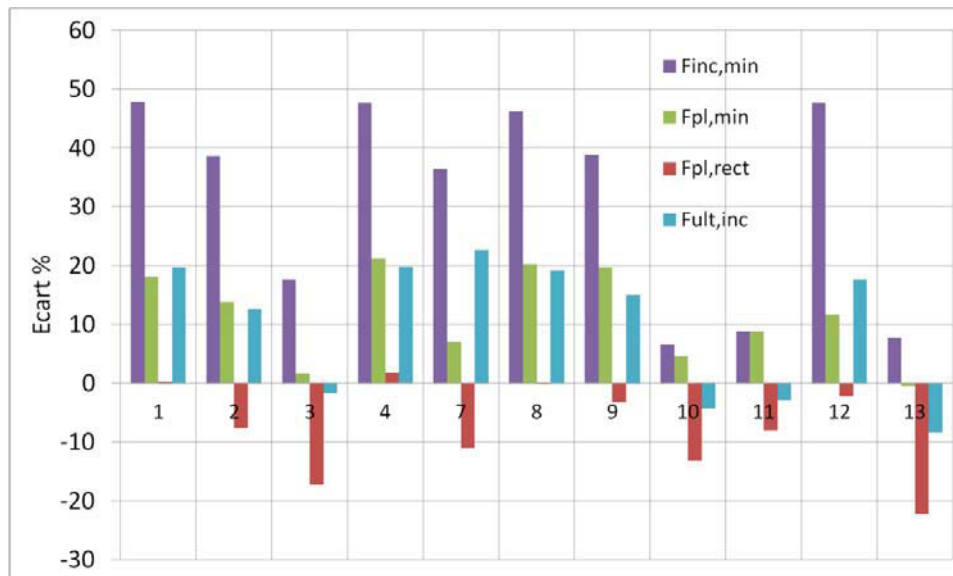


Figure V-21 Graphes des écarts pour chaque méthode analytique

L'histogramme de la **Figure V-21** donne les écarts en pourcentage des résultats analytiques par rapport aux résultats MEF en considérant les différentes approches analytiques. Les écarts sont calculés tels que :

$$\text{Ecart (\%)} = (F_{\text{MEF}} - F_{\text{analytique}}) / F_{\text{MEF}} \times 100$$

Un écart négatif correspond à un écart insécuritaire vis-à-vis des résultats numériques, considérés comme représentatifs de la réalité. Nous pouvons confirmer que considérer une résistance plastique totale de l'ouverture ($F_{\text{pl,rect}}$) peut s'avérer dans certains cas largement insécuritaire. Un certain paradoxe réside dans le fait que les cas pour lesquels les résultats sont insécuritaire correspondent à des configuration d'ouvertures amenant à une ruine type ouverture rectangulaire. L'étude approfondie autour d'une ouverture permet déjà d'élucider en partie ce paradoxe.

Ensuite, nous constatons que considérer analytiquement que la ruine de la poutre est limitée à la ruine du quart d'ouverture le plus faible ($F_{\text{inc,min}}$) reste très conservatif malgré l'amélioration faite sur le modèle analytique de vérification incrémentale. D'autres améliorations peuvent encore être établies, notamment en considérant l'apport semi-rigide du montant intermédiaire sur la stabilité de la paroi sinusoïdale et celle de la semelle. Cependant pour que le modèle analytique soit réaliste, il doit avant tout considérer la résistance apportée par le mécanisme de ruine de l'ouverture.

Ainsi, la dernière méthode proposée est la combinaison du modèle de calcul incrémental du quart d'ouverture avec le calcul de résistance d'un cadre hyperstatique ($F_{\text{inc,ult}}$). Ce dernier modèle

donne des résultats beaucoup plus proches de la réalité numérique. Les écarts importants sécuritaires sont obtenus pour les cas de petites ouvertures. Ces écarts sécuritaires importants pour les configurations de poutres avec petites ouverture n'apparaissaient pas lors de l'étude du modèle d'ouverture isolée (voir **Annexe F**) ; par conséquent ces résultats peuvent être liés à une forme de redistribution d'effort entre ouvertures. La résistance analytique de l'ouverture ne peut donc pas être remise en question, il s'agirait plutôt de faire en sorte de considérer cette réserve de résistance post-critique due à une éventuelle redistribution d'efforts entre ouvertures.

Le **Tableau V-11** présente les cas étudiés visant à valider le modèle analytique par rapport au modèle numérique. Les tests ont été effectués d'une part sur un profilé IPE 400 puis sur un profilé HEB 400. Les **Figure V-22** et **Figure V-23** présentent les écarts obtenus suivant les différents modèles exposés précédemment, effort plastique minimal (F_{pl}), effort ultime d'ouverture plastique ($F_{pl,rect}$) et effort ultime incrémentale ($F_{inc,ult}$), qui correspond à la combinaison des efforts ultimes de chaque quart d'ouverture.

Test N°	a_0/H_{TOT}	w/L_0	a_0 (mm)	w (mm)	l_s (mm)	L (m)
1	0,5	0,2	266,67	200	400	8
2	0,5	0,3	266,67	342,86	400	10
3	0,5	0,4	266,67	533,33	400	12
4	0,6	0,2	342,86	200	400	8
5	0,6	0,3	342,86	342,86	400	10
6	0,6	0,4	342,86	533,33	400	12
7	0,7	0,2	430,77	200	400	8
8	0,7	0,3	430,77	342,86	400	10
9	0,7	0,4	430,77	533,33	400	12
10	0,8	0,2	533,33	200	400	8
11	0,8	0,3	533,33	342,86	400	10
12	0,8	0,4	533,33	533,33	400	12

Tableau V-11 Liste des cas étudié suivant le profilé IPE 400 et HEB 400

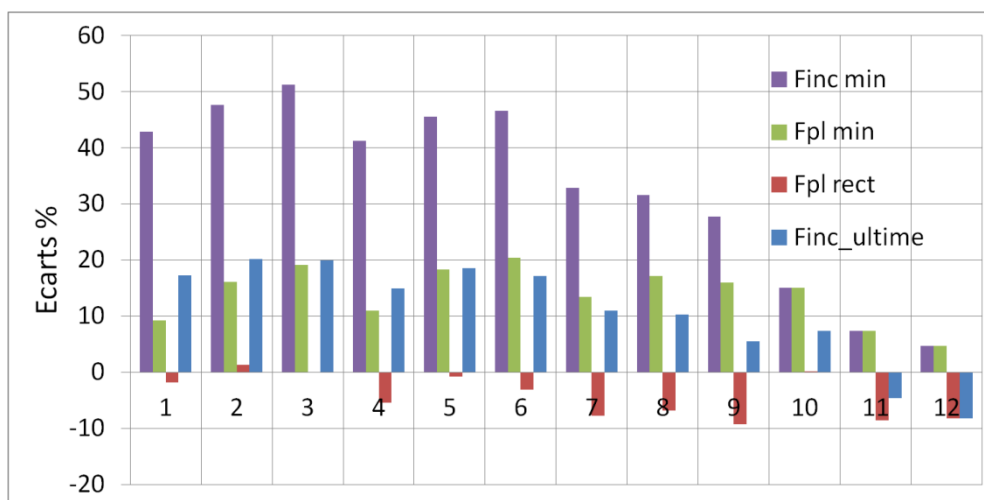


Figure V-22 Histogramme bilan des écarts entre les méthodes analytiques et le modèle numérique pour un profilé IPE400

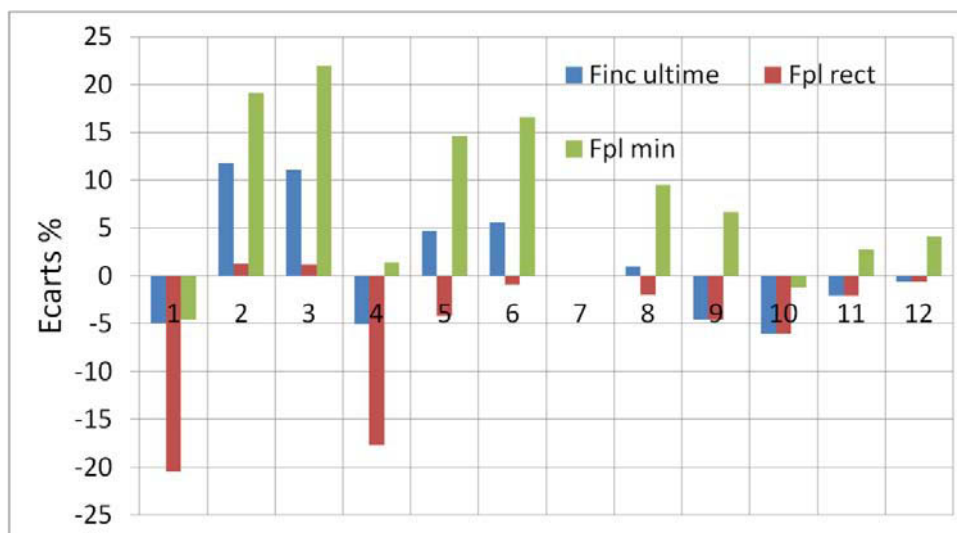


Figure V-23 Histogramme bilan des écarts entre les méthodes analytiques et le modèle numérique pour un profilé HEB400

Il peut être observé au travers des **Figure V-22** et **Figure V-23** que le modèle analytique final correspondant à $F_{inc,ultime}$ reste fiable et fidèle aux résultats numériques. Enfin, les rares écarts insécuritaires sont faibles et correspondent aux cas de plastification totale de l'ouverture ce qui implique donc forcément des écarts insécuritaires. Ces écarts sont faibles ($\approx 5\%$) et dans l'ordre de grandeur d'écarts attendu pour une étude de plastification numérique avec une loi de matériau élastique-parfaitement plastique.

La comparaison des résultats entre le modèle incrémental ultime ($F_{inc,ult}$) avec le modèle plastique rectangulaire ($F_{pl,rect}$) montre que le modèle incrémental peut encore être amélioré en cherchant à augmenter les capacités résistives des parties les plus soumises à instabilité. Seule une analyse encore plus fine des parties isolées permettrait d'améliorer le modèle. Notamment en intégrant dans la classification des sections en té les semi-rigidités, d'une part apportées par la

connexion entre l'ouverture et le montant intermédiaire et d'autre part, entre l'âme et la semelle des sections des quarts d'ouverture.

En revanche des écarts positifs (sécuritaires) plus importants (autour de 20%) ont pu être observés pour les cas d'ouvertures de petites tailles. La première hypothèse est que ces écarts ne sont pas liés à un problème du modèle analytique pour caractériser la résistance de l'ouverture critique. En effet sur le modèle d'ouverture seule, le modèle analytique a montré une bonne concordance des résultats. Par conséquent ces écarts seraient très certainement liés à une capacité de l'ouverture critique à solliciter les ouvertures adjacentes avant d'atteindre sa propre ruine.

8. CONCLUSION

Cette dernière partie a permis de boucler l'étude analytique d'une ouverture sinusoïdale en combinant l'analyse discrète d'un quart d'ouverture et celle du mécanisme de ruine d'une ouverture. Cette analyse discrète est basée sur les premières hypothèses faites de la littérature sur la répartition des efforts autour d'une ouverture. De plus, elle considère une vérification incrémentale des sections sur la longueur de chaque quart d'ouverture. Cette méthode incrémentale permet de bien identifier la section critique ainsi que le mode de ruine de chaque quart d'ouverture. En effet plusieurs observations numériques et expérimentales ont montré que la variation de section due à la forme de l'ouverture implique différentes possibilités de mode de ruine et de position de section critique rendant difficile la définition d'une position de section critique forfaitaire (méthode type ouverture rectangulaire équivalente).

Dans le but d'aider à la compréhension du comportement de ce type d'ouverture et d'avoir une démarche théorique viable, un nouveau modèle analytique a été développé. Celui-ci permet de caractériser de la manière la plus rigoureuse possible la résistance locale de chacune des parties de l'ouverture en fonction des sollicitations correspondantes.

Ensuite l'étude numérique des poutres cellulaires et plus particulièrement des ouvertures au travers de modèles simplifiés utilisés sur le logiciel de calcul MEF SAFIR a permis d'identifier le comportement de type cadre hyperstatique d'une ouverture sinusoïdale. Cette démarche a ainsi permis de mieux prendre en compte le mécanisme de ruine plastique ou élastoplastique d'une ouverture afin de retrouver une résistance ultime de l'ouverture la plus proche possible de celle obtenue à l'aide du logiciel MEF. Finalement il a pu être constaté que la combinaison de l'analyse discrète des quarts d'ouverture avec la caractérisation de la résistance globale d'une ouverture donne des résultats analytiques très proches de la réalité numérique.

Une dernière étude basée sur un modèle MEF d'ouverture seule a permis de confirmer que le modèle analytique permettait de définir correctement la résistance d'une ouverture, petite ou grande. En revanche, l'application au cas de poutre globale a montré quelques écarts importants entre le modèle MEF et le modèle analytique. Les écarts insécuritaires apparaissent pour les cas de ruine par plastification avancée car le modèle MEF ne permet pas d'obtenir une plastification complète comme supposée en théorie mais ces écarts restent acceptables ($\approx 5\%$).

Le modèle analytique que nous proposons donne des résultats fiables mais des améliorations sont encore possibles. En effet, des écarts plus importants (conservatifs) ont été observés sur des poutres cellulaires munies d'ouvertures de petites tailles. Ces écarts seraient probablement liés à une forme de redistribution d'efforts entre ouvertures. Une étude détaillée devrait être conduite pour mieux comprendre comment s'établissent ces éventuelles redistributions d'effort. De plus, la caractérisation de la résistance des différentes sections autour de l'ouverture peut être améliorée en tenant compte du maintien rotationnel apporté par la semelle et le montant d'âme adjacent à la paroi d'âme constituant l'ouverture.

CONCLUSION GENERALE

Cette thèse de doctorat propose une démarche qui a permis de développer un nouveau modèle analytique capable de représenter de manière précise et rigoureuse la résistance ultime de poutres cellulaires munies d'ouvertures sinusoïdales. Cette étude traite principalement de la résistance liée à la ruine locale autour d'une ouverture et de la flexion Vierendeel, en excluant le phénomène de déversement global. La première partie de cette thèse a permis de donner l'état de l'art des connaissances sur la résistance de poutres munies d'ouvertures isolées ou uniformément réparties (poutres alvéolaires). L'intérêt était de bien assimiler les mécanismes de ruine autour d'une ouverture rectangulaire ou circulaire pour être capable d'étudier correctement l'état ultime d'une poutre munie d'ouvertures sinusoïdales.

Cependant, la littérature montre que la forme de l'ouverture joue un rôle important sur le mode de ruine, la position de la section critique et le mécanisme de ruine d'une ouverture. Ainsi, les méthodes permettant de traiter un même phénomène qui est la flexion Vierendeel se voient évoluer avec les formes d'ouvertures. Par conséquent, l'apparition d'une nouvelle forme d'ouverture de poutre cellulaire implique la nécessité de nouvelles recherches expérimentales, numériques et analytiques.

Les premières études expérimentales présentées en seconde partie ont permis d'aider à mieux comprendre le comportement complexe de ces poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales. La mise en place de plusieurs systèmes de mesure a rendu possible l'identification de différents états ultimes, tous liés à la flexion Vierendeel. En effet comme ce type de poutre est muni de larges ouvertures et que le déversement global est empêché, seules les membrures de l'ouverture la plus sollicitée sont susceptibles d'atteindre la ruine soit par plastification soit par instabilité locale des sections fléchies et comprimées les plus élancées. Les mesures expérimentales ont servi à valider un modèle numérique qui utilise le logiciel de calcul par éléments finis SAFIR.

Ce modèle numérique a ensuite été utilisé pour une étude approfondie du mode de ruine de chaque poutre testée. Cette étude a mis en évidence que le mode de ruine d'une ouverture est directement lié à sa forme. Une grande ouverture a tendance à plastifier aux 4 coins successivement. Tandis que pour des ouvertures de plus petite taille apparaît une combinaison de ruines par instabilités locales et plastifications des différentes parties. L'objectif a donc été de pousser l'analyse numérique afin d'aider à mieux définir la résistance de chaque partie de l'ouverture. L'analyse des différentes parties de l'ouverture a permis notamment de dégager l'existence d'une liaison semi-rigide entre la paroi sinusoïdale de l'ouverture et la partie de montant d'âme pleine intermédiaire à deux ouvertures.

Cette liaison semi-rigide fait l'objet de la troisième partie. L'objectif était, à partir d'une étude paramétrique, de quantifier la valeur de cette semi-rigidité au travers d'un coefficient de maintien rotationnel appliqué sur un modèle simple de quart d'ouverture. Cependant les moyens pour atteindre cet objectif ont nécessité le développement d'un nouveau modèle numérique capable d'effectuer des calculs de modes propres d'instabilité et des calculs non-linéaires pour être confronté

à des résultats expérimentaux. De plus la complexité du modèle de poutre globale rendait difficile l'interprétation de la rigidité locale d'une partie d'une ouverture.

Pour simplifier le problème nous avons choisi de concentrer l'étude sur une nouvelle forme géométrique, celle d'un morceau de poutre contenant un montant intermédiaire avec un quart d'ouverture de part et d'autre de la partie d'âme pleine (modèle de montant isolé). Ce nouveau modèle nous a permis de tester directement le quart d'ouverture en flexion et d'étudier la rigidité de la liaison entre le quart d'ouverture et le montant d'âme intermédiaire. Le modèle numérique développé sur CAST3M a été validé sur la base de nouveaux essais expérimentaux effectués sur plusieurs modèles de montants isolés.

Ce modèle a ensuite été utilisé pour une étude paramétrique basée uniquement sur des calculs de modes propres d'instabilité. Les résultats de l'étude paramétrique, grâce aux connaissances acquises sur les plans d'expérience ont permis de développer une loi empirique capable de quantifier cette semi-rigidité en fonction des seuls paramètres géométriques d'ouverture a_0 (hauteur d'ouverture), w (largeur de montant) et l_s (longueur de sinusoïde).

Ce travail numérique avait pour principal objectif de mieux définir le comportement et la résistance des ouvertures sinusoïdales. Le but in-fine a été de développer un modèle analytique plus réaliste qu'une simple adaptation des codes existants. Tout d'abord, nous avons montré qu'il est préférable de considérer un modèle d'interaction Moment-Effort axial exact pour les sections en T de quarts d'ouverture. Nous proposons ainsi une formule approchée en **Annexe B**.

Ensuite, nous avons pu constater que les classifications de sections fournies par les normes actuelles s'avèrent mal adaptées pour les cas de sections autour d'une ouverture. En effet, celles-ci ne permettent pas de considérer l'apport de rigidité du montant intermédiaire. Le travail en quatrième partie a donc été d'établir un nouveau calcul du coefficient de contrainte critique k_σ . Ce nouveau calcul, combiné aux modèles théoriques existants qui traitent de la résistance élasto-plastique des plaques semi-compactes, a permis de mieux définir la résistance des sections de l'ouverture proches du montant intermédiaire.

Cependant, cet apport théorique n'amène que peu d'amélioration sur le résultat analytique final. En effet, considérer la ruine de la poutre à partir de la ruine d'une des parties de l'ouverture est une hypothèse très conservatrice. Plusieurs études numériques ont montré l'existence d'un mécanisme de ruine de l'ouverture sinusoïdale.

Ainsi, la dernière partie de ce travail s'est consacrée à l'étude de ce mécanisme de ruine. En premier lieu, nous nous sommes intéressés aux poutres pour lesquelles le schéma de ruine était similaire à une ouverture rectangulaire avec la formation de 4 rotules plastiques aux 4 coins de l'ouverture critique. L'étude menée sur ce type d'ouverture a clairement identifié la plastification successive des différentes parties de l'ouverture (quart d'ouverture).

De manière analytique, pour mieux comprendre la répartition des efforts autour d'une ouverture, après la formation de premières rotules plastiques, nous avons choisi d'étudier un système de cadre hyperstatique. La résolution théorique de ce système a permis d'estimer la réserve

de résistance possible après la ruine d'une ou de plusieurs parties d'une ouverture en établissant la nouvelle répartition des efforts. Une étude numérique menée sur un modèle d'ouverture isolée en console nous a permis de valider notre démarche analytique. Elle nous a permis de montrer que la résistance globale d'une ouverture combine la ruine par instabilité et par plastification des différentes parties de l'ouverture, suivant que l'âme en bord soit tendue ou comprimée.

L'adaptation du modèle analytique à différentes poutres cellulaires avec diverses formes d'ouvertures sinusoïdales a été confrontée à plusieurs résultats numériques. Cette étude comparative nous a montré que le modèle analytique développé reste fiable et réaliste en comparaison des résultats numériques. Seuls quelques écarts insécuritaires (effort ultime analytique inférieure à l'effort ultime numérique) ont été observés pour des cas de plastification des 4 coins de l'ouverture. Cependant ces écarts restent acceptables (<5%) et dans l'ordre de grandeur des écarts attendus entre les résistances plastiques théorique et numérique sans écrouissage.

Cependant, le modèle analytique que nous proposons peut encore être amélioré. En effet certains résultats donnent des écarts conservatifs par rapport au modèle numérique de l'ordre de 20%. Ces écarts peuvent être dus à une autre forme de redistribution d'efforts entre ouvertures. Une étude plus détaillée autour de ces quelques cas permettrait de clairement identifier l'importance et les raisons de cette résistance supplémentaire. De plus, il serait intéressant d'améliorer le critère de résistance au voilement local des sections afin de tenir compte de la connexion semi-rigide quantifiée en troisième partie et mieux définir la rigidité apportée par la semelle, notamment dans le cas d'une poutre mixte. La liaison dalle béton /semelle procure une rigidité suffisante pour pouvoir considérer la connexion âme/semelle des sections en T le long de l'ouverture comme encastree [LAW, 87], ce qui peut s'avérer non négligeable dans certains cas.

Ensuite, il est possible d'adapter le modèle analytique proposé au cas de températures élevées. En effet, ce modèle n'est basé sur aucune formule empirique et peut donc aisément s'adapter à des conditions d'incendie dans l'éventualité où la flexion Vierendeel reste le mode de ruine prédominant. Une étude approfondie sur l'impact des températures élevées sur l'état ultime de ces poutres serait donc nécessaire.

Enfin, une autre perspective serait une étude du comportement des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales en construction mixte. Dans ce cas, il serait alors intéressant d'étudier l'influence du degré de connexion sur la résistance d'une ouverture sinusoïdale. En effet, cette forme d'ouverture est relativement allongée et les goudons situés sur la longueur de l'ouverture peuvent avoir une certaine influence. Des études existantes sur les poutres cellulaires en construction mixte ont fait état d'une action mixte locale qui serait certainement non négligeable dans le cas d'ouvertures sinusoïdales [LAW, 06] [VEL, 06]. Cependant, les modèles existants ont été développés de manière empirique et seule une étude axée sur cette nouvelle forme d'ouverture permettrait de définir correctement la résistance ultime de ces poutres en construction mixte.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [AIS, 05] American Institute of Steel Construction (AISC), "Load and resistance factor design specification for structural steel buildings", 2005.
- [AUD, 12] M. AUDEBERT, D. DHIMA, M. TAAZOUNT, A. BOUCHAÏR, "Behavior of dowelled and bolted steel-to-timber connections exposed to fire", Engineering Structure 2012, vol.39 pp. 116-125.
- [BAH, 68] M. BAHAUD, « Cours sur la méthode énergétique », INSA de Lyon, 1968.
- [BAI, 04] C. BAILEY, "Indicative fire tests to investigate the behavior of cellular beams protected with intumescent coatings", Fire Safety Journal, vol.39, pp. 689-709, 2004.
- [BAL, 08-1] M. BALASUBRAMANIAN, V. JAYABALAN, V. BALASUBRAMANIAN, "Developing mathematical models to predict grain size and hardness of argon tungsten pulse current arc welded titanium alloy", Journal of Materials Processing Technology, vol.196, pp.222-229, 2008.
- [BAL, 08-2] M. BALASUBRAMANIAN, V. JAYABALAN, V. BALASUBRAMANIAN, "Developing mathematical models to predict tensile properties of pulsed current gas tungsten arc welded Ti-6Al-4V alloy", Materials and design, vol.29, pp. 92-97, 2008.
- [BAP, 06-1] A. M. BAPTISTA, J. P. MUZEAU, "Analytical formulation of the elastic-plastic behavior of bi-symmetrical steel shapes", Journal of constructional steel research, vol.62, pp. 872-884, 2006.
- [BAP, 06-2] A. M. BAPTISTA, "Analytical criteria for the evaluation of the internal forces at the elastic and plastic limit states of lozenge and triangular cross-sections", European conference on computational mechanics solids, structures and coupled problems in engineering, 2006.
- [BAP, 06-3] A. M. BAPTISTA, "Critério de interacção entre o esforço normal e o momento flector em secções de aço em I monossimétricas totalmente plastificadas", JPEE, 4th Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, 2006.
- [BAP, 07] A.M. BAPTISTA, "Plastic reserve capacity of hot rolled steel sections", RENE MAQUOI 65th birthday anniversary 14 December 2007.
- [BAS, 72] S.F. BASSILY, S.M. DICKINSON, "Buckling and lateral vibration of rectangular plates subject to in-plane loads-a Ritz approach", Journal of Sound and Vibration, vol.24, pp.219-239, 1972.
- [BED, 97] O. K. BEDAIR, "Influence of in-plane restraint on the buckling behavior of plates under uniform compression, shear and in-plane bending", Computer methods in applied mechanics and engineering, vol.148, pp.1-10, 1997.
- [BEZ, 02] P. BEZKOROVAINY, T. BURNS, K.JR RASMUSSEN, "Strength curves for metal plates in compression", Research Report No R821, Centre For Advanced Structural Engineering 2002.

- [BIT, 98] D. BITAR, «Vérification à l'ELU des poutres métalliques avec ouvertures d'âme, exemple de calcul et recommandations», Revue Construction Métallique (CTICM), n°1, pp.80-98, 1998.
- [BIT, 01] D. BITAR, P. MAITRE, « Poutres mixtes de bâtiment avec ouverture isolée dans l'âme démarche de vérification et exemple de calcul », revue CM n°4, 2001.
- [BIT, 04] D. BITAR, « Poutre en I à âme élancée-vérification de la résistance d'un panneau d'âme muni d'une ouverture circulaire centrée », Revue Construction Métallique (CTICM), 2004.
- [BIT, 06] D. BITAR, MARTIN P.O., GALEA Y., DEMARCO T., « Poutres cellulaires acier et mixtes : Partie 1, proposition d'un modèle pour la résistance des montants », Revue Construction Métallique (CTICM), n°1, pp.15-39, 2006.
- [BLE, 52] F. BLEICH, "Buckling Strength of Metal Structures", Mc Graw Hill Book Company, 1952.
- [BRA, 00] M.A. BRADFORD, S.T. SMITH, D.J. OEHLERS, "Semi-compact steel plates with unilateral restraint subjected to bending, compression and shear", Journal of Constructional Steel Research, vol.56, pp.47-67, 2000.
- [BS, 01] British Standard BS5950-2, "Structural use of steelwork in building-Part 2: Specification for materials, fabrication and erection-Rolled and welded sections", 2001.
- [BUL, 70] P.S. BULSON, "The Stability of Flat Plates", Chatto&Windus, 1970.
- [CHE, 12] S-J CHENG, Jr-M MIAO, S-J WU, "Investigating the effects of operational factors on PEMFC performance based CFD simulations using a three-level full factorial design", Renewable Energy, vol.39, pp. 250-260, 2012.
- [CHU, 01-1] K.F. CHUNG, R.M. LAWSON, "Simplified design of composite beams with large web openings to Eurocode 4", Journal of Constructional Steel Research, vol. 2, pp.135-164, 2001.
- [CHU, 01-2] K.F. CHUNG, TCH. LIU, ACH Ko, "Investigation on Vierendeel Mechanism in steel beams with circular web openings", Journal of Constructional Steel Research, vol.5, pp. 467-490, 2001.
- [CHU, 03] K.F. CHUNG, TCH. LIU, ACH KO, "Steel beams with large web openings of various shapes and sizes: an empirical design method using a generalized moment shear interaction curve" , Journal of Constructional Steel Research, vol.59, pp. 1177-1200, 2003.
- [DAR, 03] D. DARWIN, "Design of Steel and Composite Beams with Web Openings", Design Guide 2, AISC, 3ème edition, 65 pages, 2003.
- [DEM, 99] S. DEMIRDJIAN, « Stability of Castellated Beam Webs », Thèse de master pour le diplôme d'ingénieur, McGill University, Monreal, 1999.
- [DUR, 09] S. DURIF, « Validation du modèle analytique de calcul de poutres cellulaires courbes ou à inertie variable sous situation normale et d'incendie », Mémoire fin d'étude ingénieur, 2009.

- [DUR, 11] S. DURIF, O. VASSART, A. BOUCHAÏR, J.P. MUZEAU, « Modèle mécanique pour les poutres à larges ouvertures d'âmes de section variable », 29èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil, AUGC, Tlemcen, Vol. 1, pp. 345-355, mai 2011.
- [DUR, 12-1] S. DURIF, A. BOUCHAÏR, O. VASSART, "Experimental and numerical investigations on cellular beams with sinusoidal openings", ENGINEERING STRUCTURES, 2012 (under review).
- [DUR, 12-2], S. DURIF, « Rapport des essais expérimentaux sur poutrelles Angelina™ », 2012.
- [EC, 09] SEMI-COMP : Plastic member capacity of semi-compact steel sections-a more economic design, Research fund for Coal and Steel, Final report, 2009.
- [EHA, 11] E. EHAB, "Interaction of buckling modes in castellated steel beams", Journal of Constructional Steel Research, vol.67, pp.814-825, 2011.
- [EHA, 12] E. EHAB, "Nonlinear analysis of cellular steel beams under combined buckling modes", Thin Walled Structures, vol.52, pp.66-79, 2012.
- [EN3-1-1] EN 1993-1-1, Eurocode 3 - Design of steel structures - part1-1 : "General rules and rules for buildings", 2003.
- [EN3-1-3] EN 1993-1-3, Eurocode 3 - Design of steel structures - part1-3 : "General rules – Supplementary rules for cold-formed members and sheeting", 2006.
- [EN3-1-5] EN 1993-1-5, Eurocode 3 - Design of steel structures - part1-5 : "Plated structural elements", 2004.
- [ENV, 95] ENV 1993-1-1, Eurocode 3 - Design of steel structures – Part 1-1 : "General rules and rules for buildings", Annexe N, 1995.
- [FRA, 02] J.M. FRANSSEN, V.K.R. KODUR, J. MASON, "Elements of theory for SAFIR", 2002.
- [FRA, 07] J.M. FRANSSEN, "User's manual for safir a computer program for analysis of structures subjected to fire", 2007.
- [GAN, 11] A. H. GANDOMI, S. M. TABATUBAI, M. O. MORADIAN, A. RADFAR, A. H. ALAVI, "A new prediction model for the load capacity of castellated steel beams", Journal of Constructional Steel Research, vol.67, pp.1096-1105, 2011.
- [GOU, 06] J. GOUPY, « Les Plans d'expériences », revue Modulad n°34, 2006.
- [HAG, 09] N.C. HAGEN, "Shear capacity of steel plate girders with large web openings, Part I: Modeling and simulations", Journal of Constructional Steel Research, vol. 65, pp.142-150, 2009.
- [HOFF, 12] R. HOFFMAN, D. DINEHART, S. GROSS, J. YOST, "Analysis of Stress Distribution and Failure Behavior of Cellular Beams", 2012.

- [JOH, 01] B. JOHANSSON, M. VELJKOVIC, "Steel plated structures", Progress Structural Engineering, vol.3, pp.13-27, 2001.
- [JOH, 07] B. JOHANSSON, R. MAQUOI, G. SEDLACEK, C. MÜLLER, D. BEG, "Commentary and worked examples to EN 1993-1-5 « plated structural elements »", JRC Scientific and Technical Reports, 2007.
- [KAN, 05] J.H. KANG, A. W. LEISSA, "Exact solutions for the buckling of rectangular plates having varying in-plane loading on two opposite simply supported edges", International Journal of Solids and Structures, vol. 42, pp. 4220-4238, 2005,.
- [KER, 84] D. KERDAL, D.A. NETHERCOT, "Failure modes of castellated beams", Journal of constructional steel research, vol.4, pp.295-315.
- [KNO, 06] M. KNOBLOCH, M. FONTANA, "Strain based approach to local buckling of steel sections subjected to fire", vol. 62, pp.44-67, 2006.
- [KOL, 64] J. KOLOSOWSKI, "Stresses and deflexions in castellated beams", The structural engineer n°1, vol.42, 1964.
- [LAG, 08] N.D. LAGAROS, D.P. LEMONIS, M. PAPADRAKAKIS, G. PANAGITOU, "Optimum design of steel structures with web openings", Engineering Structures, vol. 30, pp. 2528-2537, 2008.
- [LAW, 87] R.M. LAWSON, "Design for openings in the webs of composite beams", Steel Construction institute Publication, vol.68, 1987.
- [LAW, 06] R.M. LAWSON, J. LIM J, S.J. HICKS, W.I. SIMMS, "Design of composite asymmetric cellular beams and beams with large web openings", Journal of Constructional Steel Research, vol 6(62), pp. 614-629, 2005.
- [LE, 12] K.T. LE, « Identification des caractéristiques aléatoires de remblais à partir du suivi de santé des structures : application aux structures portuaires », Phd thesis, Université de Nantes Faculté des sciences et des techniques, 2012.
- [LEQ, 91] PH. LEQUIEN, J. RAOUL, J. ROCHE, « Application de l'Eurocode 3 Résistance des âmes au voilement par cisaillement », Revue Construction Métallique n°3, 1991.
- [LES, 77] Y. LESCOUARCH, « Capacité de résistance d'une section soumise à divers types de sollicitations », Revue Construction Métallique n°2, 1977.
- [LIA, 04] V.T. LIAN, N.E. SHANMUGAM, "Design of horizontally curved plate girder webs containing circular openings", Thin-Walled Structures, vol.42, pp.719-739, 2004.
- [LIU, 03] TCH LIU, KF CHUNG, "Steel beams with large web openings of various shapes and sizes: finite element investigation", Journal of Constructional Steel Research, vol.59, pp.1159-1176, 2003.

- [MAD, 12] F. MADADI, F. ASHRAFIZADEH, M. SHAMANIAN, "Optimization of pulsed TIG cladding process of satellite ally on carbon steel using RSM", Journal of alloy and compounds, vol.510, pp.71-77, 2012.
- [MAI, 09] P. MAITRE, « Formulaire de la construction métallique », LeMoniteur, Troisième édition, 2009.
- [MAN, 94] A. M. HIRT, R. BEZ, « Traité de Génie Civil vol,10 : Construction Métallique, notions fondamentales et méthodes de dimensionnement », presses politiques et universitaires romandes, 1994.
- [MAN, 09-1] P. MANGIN, Etude des poutres Angelina et développement d'un logiciel de calcul phase 2: Programme expérimentale – Cahier des Charges.
- [MAN, 09-2] P. MANGIN, BUREAU A. ArcelorMittal Cellular Beams Logiciel ACB+ : Descriptif technique, Rapport technique n°7,072-01, Centre Technique Industriel de la Construction Métallique CTICM ; 2009.
- [MAQ, 00] R. MAQUOI, M. SKALoud, "Stability of plates and plated structures General Report", Journal of Constructional Steel Research, vol. 55, pp.45-68, 2000.
- [MOH, 04] A. MOHEBKHAH, "The moment gradient factor in lateral torsional buckling on inelastic castellated beams", Journal of Constructional Steel Research, vol.60, pp.1481-1494, 2004.
- [MOH, 05] A. MOHEBKHAH, H. SHOWKATI, "Bracing requirements for inelastic castellated beams", Journal of Constructional Steel Research, vol.61, pp. 1373-1386, 2005.
- [NAD, 07] A. NADJAI, O. VASSART, "Performance of cellular composite floor beams at elevated temperatures", Fire safety journal, vol.42, pp.489-497, 2007.
- [NAI, 11] EL-HADI NAILI, A. NADJAI, S. HAN, F. ALI, S. CHOI, "Experimental and numerical modeling of cellular beams with circular and elongated web openings at elevated temperatures" , Journal of Structural Fire Engineering, vol. 2, n°4, 2011.
- [NAR, 85] R. NARAYANAN, N. GARA-VERNI, DR AVANESSIAN, "Design of slender web shaving rectangular holes", Journal of Structural Engineering, vol.111_n°4, pp. 777-787, 1985
- [PAI, 00] J.K. PAIK, A. K. THAYAMBALLI, "Buckling strength of steel plating with elastically restrained edges", Thin-Walled Structures vol.37, pp.27-55, 2000.
- [PIL, 98] M. PILLET, « Construire facilement des plans d'expérience de résolution IV à partir des tables de TAGUCHI », Revue de Statistique Appliqué, tome 46, n°4, pp.85-100, 1998.
- [PIL, 01] M. PILLET, « Les Plans d'expériences par la méthode TAGUCHI », Les éditions d'organisation, 2001.
- [REA, 02] J.F. REAMCLE, « Cours mécanique des structures », Université de Louvain, 2002.

- [RED, 78] R.G. REDWOOD, « Analyse et dimensionnement des poutres ayant des ouvertures dans les âmes », Revue Construction métallique, n°3, pp.15-27, 1978.
- [ROD, 08] A. RODIER, « Adaptation de modèles de calcul pour les poutres cellulaires au cas des poutres courbes en élévation », Mémoire fin d'étude ingénieur, 2008.
- [SAD, 91] G. SADO, M.C. SADO, « Les plans d'expériences : de l'expérimentation à l'assurance », 1991.
- [SHO, 12] H. SHOWKATI, T. GHANBARI, A. NOORI, T. ZIRAKIAN, "Experiments on elastically braced castellated beams", Journal of Constructional Steel Research, vol.77, pp.163-172, 2012.
- [SMI, 99] S.T. SMITH, M.A. BRADFORD, D.J. OEHLERS, "Elastic buckling of unilaterally constrained rectangular plates in pure shear", Engineering Structures, vol.21, pp.443-453, 1999.
- [SOA, 96] C. G. SOARES, J.M. GORDO, "Collapse strength of rectangular plates under transverse compression", Journal of Constructional Steel Research, Vol.36, pp.21-234, 1996.
- [SOL, 11] M.R. SOLTANI, A. BOUCHAÏR, M. MIMOUNE, "Nonlinear FE analysis of the ultimate behavior of steel castellated beams", Journal of Constructional Steel Research, 14 pages, in press doing: 10.1016/j.jcsr.10.016, 2011.
- [SWA, 95] S.E. SWARTZ, R.J. O'NEILL, "Linear elastic Buckling of Plates subjected to combined loads", Thin Walled Structures vol.21, pp.1-15, 1995.
- [SWE, 11] A.M.I. SWEEDAN, "Elastic lateral stability of I-shaped cellular steel beams", Journal of Constructional Steel Research, vol.67, pp.151-163, 2011.
- [TIM-1, 13] S. TIMOSHENKO, « Application d'une nouvelle méthode à la recherche de la stabilité de certaines parties constitutives des ponts première partie », Annales des Ponts et Chaussées 1913-I, n°24 Sur La Stabilité Des Systèmes Elastiques, page 496, 1913.
- [TIM-4, 13] S. TIMOSHENKO, « Stabilité des plaques comprimées », Les anales 1913-IV, n°50 Sur La Stabilité Des Systèmes Elastiques, Application d'une nouvelle méthode à la recherche de la stabilité de certaines parties constitutives des ponts troisième partie, page 372, 1913.
- [TIM, 40] S. TIMOSHENKO, "Strength of Materials-Part 1 : Elementary Theory and Problems", 1940.
- [TIM, 43] S. TIMOSHENKO, « Théorie de la Stabilité élastiques », 1943.
- [TSA, 10] K.D. TSAVDARIDIS, "Structural Performance of perforated steel beams with novel web openings and with partial concrete encasement", Thèse de doctorat, School of Engineering and Mathematical Sciences City University London, 2010.
- [TSA, 11] K.D. TSAVDARIDIS, C. D'MELLO, "Web buckling study of the behaviour and strength of perforated steel beams with different novel web openings shapes", Journal of Constructional Steel Research, vol.67, pp.1605-1620, 2011.

- [VAS, 09-1] O. VASSART, "Analytical Model for cellular beams made of hot rolled sections in case of fire", Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, 2009.
- [VAS, 09-2] O. VASSART, R. ZANON, "AngelinaTM Design method", Présentation powerpoint ArceloMittal, 2009.
- [VEL, 06] M. VELJKOVIC ET AL., "Large web openings for service integration in composite floors", CECA projects, 120 pages, 2006.
- [WAR, 90] J.K. WARD, "Design of Composite and Non-Composite Cellular Beams", SCI Publication 100, 1990.
- [WON, 09] WONG V. B., BURGESS I., PLANK R., Behaviour of Composite Cellular Steel-Concrete Beams at Elevated Temperatures, International Journal of Steel Structures, vol. 9, pp.29-37, 2009.
- [YAM, 01] T. YAMASHITA, S. KATO, "Elastic buckling characteristics of two-way grid shells of single layer and its application to evaluate the non-linear behavior and ultimate strength", Journal of constructional steel research, vol. 57, pp. 1289-1308, 2001.
- [ZIE, 00] O.C. ZIENKIEWICZ, "The finite element method, volume 1: The basis", fifth edition, 2000.
- [ZIR, 06] T. ZIRAKIAN, H. SHOWKATI, "Distortional buckling of castellated beams", Journal of Constructional Steel Research, vol.62, pp.863-871, 2006.

Annexe A

Notations & Terminologie

$$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$$

$M_{pl, Rd}$: Moment plastique résistant

$M_{el, Rd}$: Moment élastique résistant

$M_{N,pl, Rd}$: Moment plastique résistant réduit par interaction avec un effort axial

$M_{N,el, Rd}$: Moment élastique résistant réduit par interaction avec un effort axial

$M_{V, Ed}$: Moment sollicitant Vierendeel

Paramètres liés au profilé :

t_w : épaisseur d'âme

t_f : épaisseur de semelle

r : rayon de congé de raccordement

b : largeur de semelle

Paramètres liés aux poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales :

a_0 : hauteur d'ouverture sinusoïdale

w : largeur de montant/longueur de la partie droite de l'ouverture sinusoïdale

l_s : longueur de la partie sinusoïdale de l'ouverture

L_0 : longueur d'ouverture = $w + 2 \times l_s$

H_{tot} : hauteur totale de la poutre après formation de la poutre cellulaire = $H_{ini} + a_0/2$

H_{ini} : hauteur du profilé initial avant conception de la poutre cellulaire

Paramètres liés au calcul de stabilité de plaque (PARTIE IV) :

k_σ : Coefficient de contrainte critique de plaque, fonction du chargement et des dimensions de la plaque étudiée

σ_E : Contrainte élastique d'Euler

σ_{cr} : Contrainte critique de voilement élastique, $\sigma_{cr} = k_\sigma \times \sigma_E$

α : Rapport des dimensions d'une plaque de longueur a et de largeur b , $\alpha = a/b$

ψ : Rapport de contraintes sollicitant la largeur d'une plaque suivant la définition de l'eurocode 3 partie 1-5, il définit le rapport de contrainte minimale de compression (qui peut être de traction) sur la contrainte de compression maximale, $\psi = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$

ρ : Facteur numérique similaire à ψ , utilisé pour la résolution du problème de plaque de Timoshenko.

Efforts ultimes suivant différentes méthodes analytiques (PARTIE V) :

$F_{pl, \min}$: Effort pour lequel la poutre atteint au niveau d'une partie de l'ouverture la formation de la première rotule plastique.

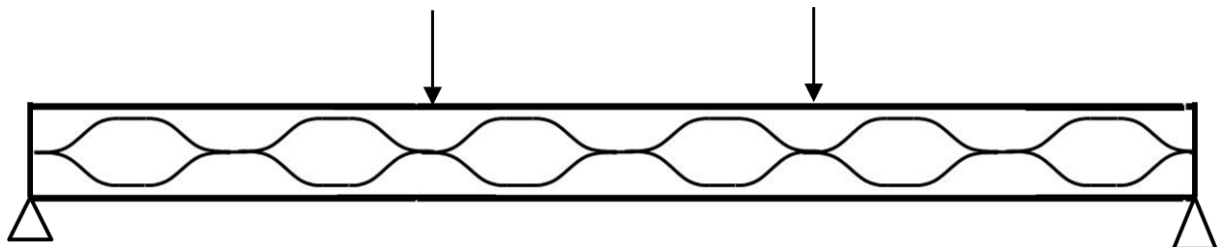
$F_{inc, \min}$: Effort analytique correspondant à la ruine de la partie de l'ouverture ayant une résistance minimale, cet effort étant considéré comme l'effort ultime dans les premiers modèles analytiques

$F_{pl, rect}$: Effort ultime en considérant une ouverture rectangulaire équivalente, il correspond ainsi à la formation supposée de 4 rotules plastiques aux 4 coins de l'ouverture rectangulaire équivalente

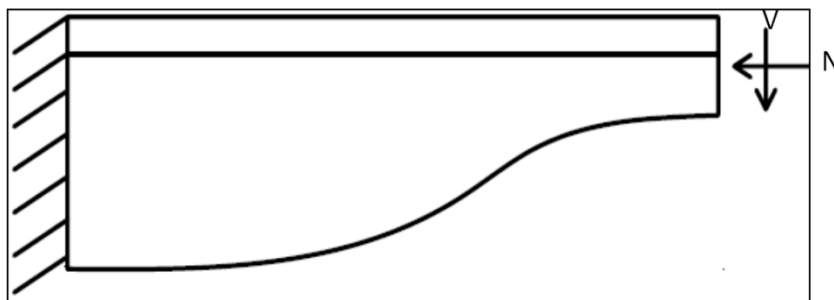
$F_{inc, ult.}$: Effort ultime déduit du modèle analytique proposé dans ce doctorat combinant ainsi les différents travaux analytiques établi durant ce travail

Illustrations des différents modèles géométriques utilisés :

Modèle de poutre globale :

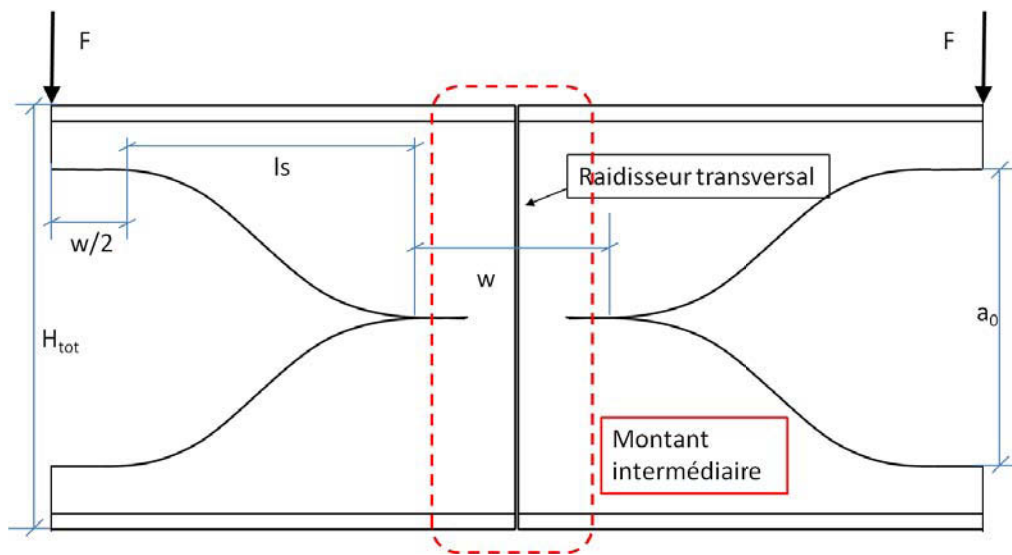


Modèle de quart d'ouverture isolé :

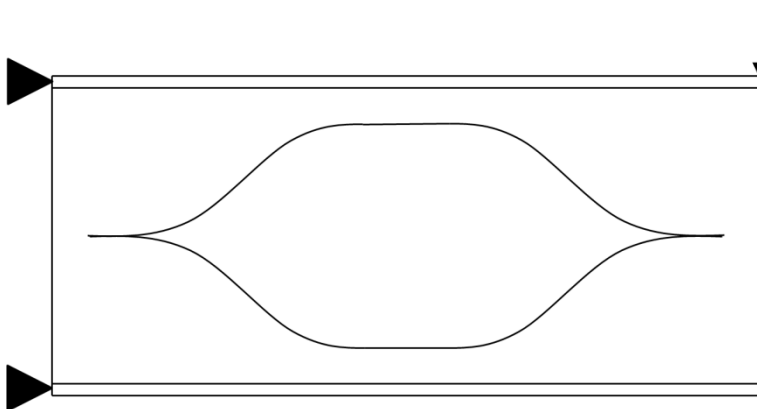


Les hachures de ce modèle de quart d'ouverture isolé représentent la connexion avec le montant d'âme intermédiaire sur une poutre. Celle-ci peut être considérée comme semi-rigide, avec un **coefficient de maintien rotationnel k_θ (PARTIE III)**.

Modèle de montant isolé :



Modèle d'ouverture isolée :



ANNEXE B

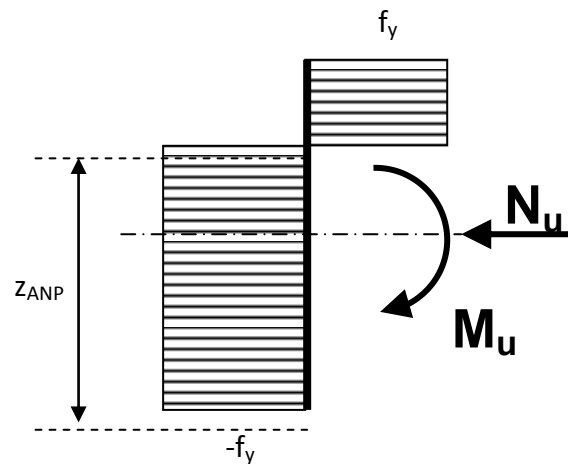
Interaction M-N d'une section en té et développement d'une méthode simplifiée

Cette annexe présente le calcul permettant de déterminer la position de l'axe neutre plastique d'une section en té soumise à de la flexion composée. Ensuite elle présente le calcul du moment résistant et enfin la validation de l'adaptation d'une formule d'interaction initialement proposée par Antonio Baptista.

1. DIAGRAMME D'INTERACTION

Il s'agit dans cette partie de démontrer les formules permettant de déterminer la position de l'axe neutre plastique d'une section soumise à de la flexion composée. Dans le cas d'une plastification totale de section par flexion composée (avec N_u et M_u les efforts ultimes correspondant), le diagramme de contrainte peut se tracer par deux rectangles d'intensité égale à la limite élastique f_y .

L'axe neutre plastique est à la distance z_0 du centre de gravité (axe d'application de l'effort axial N_u).

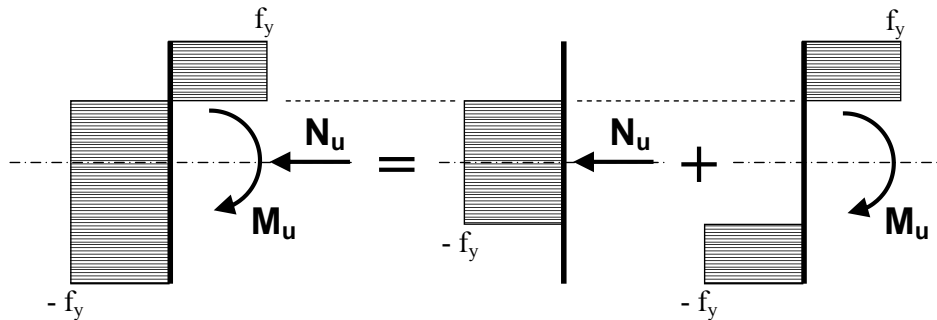


Ce diagramme de contrainte bi-rectangulaire équilibre un moment (M_u) et un effort axial (N_u). Tel que les efforts vérifient les intégrales ci-contre :

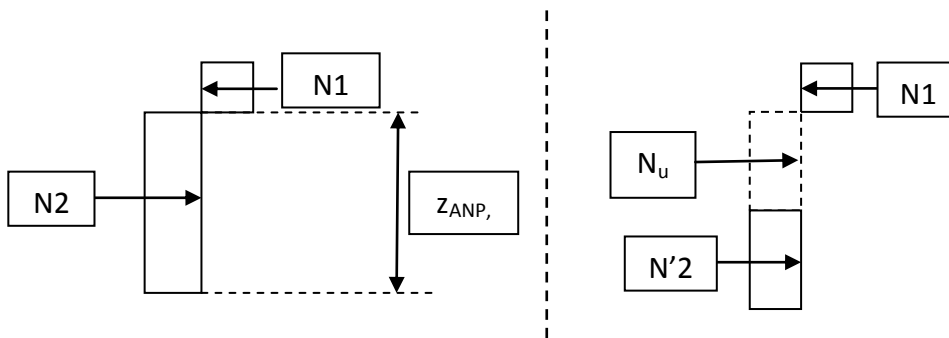
$$N_u = f_y \int_0^h b(z). dz \quad (= 0 \text{ en flexion simple})$$

$$M_u = f_y \int_0^h z. b(z). dz$$

Ce diagramme peut être décomposé en deux diagrammes séparés ayant pour résultante un effort normal seul N_u et l'autre un moment de flexion seul M_u de la manière suivante :



Pour simplifier il a été choisi d'utiliser les appellations décrites ci-après, avec N_1 , N_2 et N_2' les efforts correspondant aux différentes intégrales des parties du diagramme de contrainte.



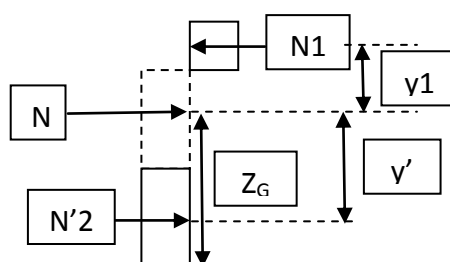
L'équilibre des efforts équivalent au diagramme de contrainte de flexion composée plastique donne :

$$N_2 - N_1 = N_u \neq 0$$

De plus, les intégrales du diagramme dont la résultante est le moment de flexion seul sont appelées N_1 et N_2' et sont définis tel que :

$$N_1 = N_2'$$

Le calcul du moment plastique résistant revient à faire l'équilibre des moments de la section. Afin de ne pas considérer la part induite par N_u , il a été choisi de faire l'équilibre au niveau de la position du point d'application de l'effort N_u dans le diagramme des contraintes :



Ainsi, l'équilibre des moments des efforts résultant du diagramme ci-dessus donne :

$$M_{pl,Rd} = N1 \times y1 + N'2 \times y'2 = N1 \times e = M_u$$

Avec : $e = y1 + y'2$

Cette manière de calculer suit celle décrite par Y. Lescouarch dans le cas de section rectangulaire (et sections doublement symétriques). Il peut être constaté que cette méthode entraine un diagramme d'interaction quadratique [LES, 77].

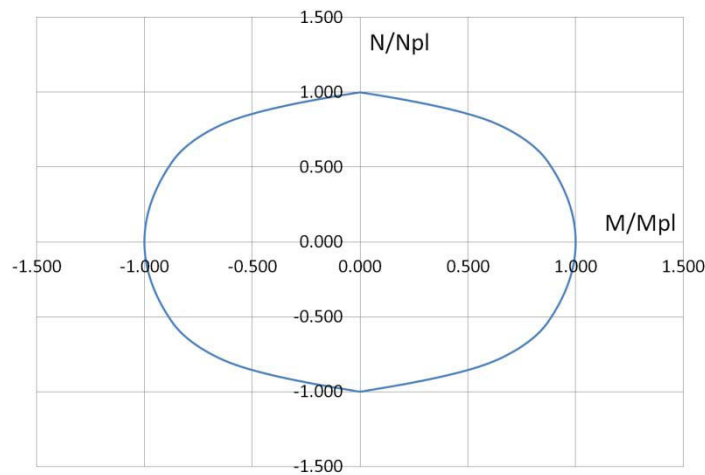
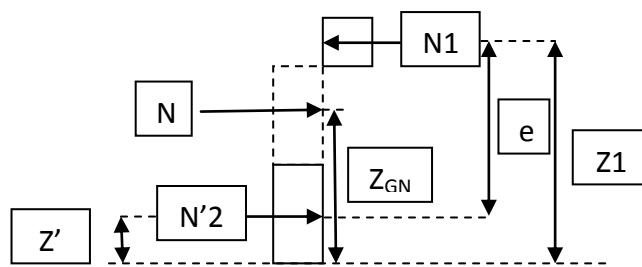


Figure 1-1 Diagramme d'interaction M-N quadratique

Cependant, en faisant l'équilibre des moments en un autre point du diagramme, il peut être constaté que le moment résistant obtenu est différent. En effet, si la somme des



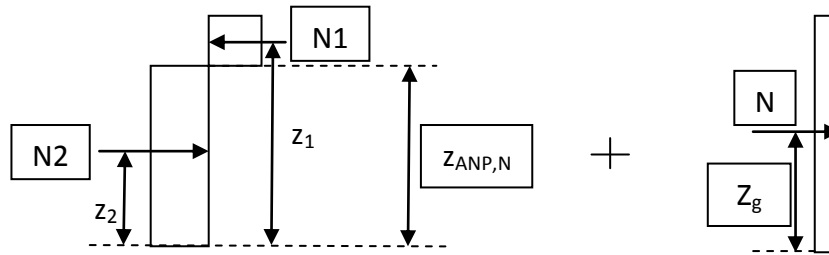
$$M_{pl,Rd} = N1 \times z1 - N'2 \times z'2 - N_u \times z_{G,N} = N1 \times e - N_u \times z_{G,N}$$

Avec, $z_{G,N}$ le centre de gravité de la composante liée à l'effort N_u du diagramme de contrainte plastique. Le résultat obtenu est donc différent de la quantité $N_u \times z_{G,N}$. Ainsi, cela montre que cette manière de calculer ne donne pas un moment plastique résistant car il ne correspond pas à un couple indépendant du point de calcul du moment. Par conséquent ce diagramme n'est pas en équilibre car le moment induit par ce diagramme virtuel devrait fournir un couple indépendant du point auquel la somme des moments est calculée.

Le barycentre (le calcul du centre de gravité z_2) du rectangle correspondant à N_2 donne :

$$N_2 \times z_2 = N'_2 \times z'_2 + N \times z_{g,N}$$

Cependant, le diagramme de contrainte de flexion composée ne s'équilibre qu'avec celui de l'effort axial. Ainsi, si on considère le diagramme complet pour l'équilibre des moments, on doit compter l'effort axial :



En effet le premier diagramme (à gauche) n'existe pas sans l'autre (à droite), du fait de la simple relation d'équilibre des efforts :

$$N_2 - N_1 - N = 0$$

Par conséquent, cet effort axial doit nécessairement intervenir dans l'équilibre des moments qui correspond au calcul du moment plastique résistant $M_{pl,Rd}$. Cela revient à écrire, en considérant le calcul du moment par rapport à la fibre inférieure :

$$M_{pl,Rd} = N_1 \times z_1 - N_2 \times z_2 + N \times Z_g$$

En reprenant l'équation du barycentre: $N_2 \times z_2 = N'_2 \times z'_2 + N \times z_{g,N}$

On arrive à :

$$M_{pl,Rd} = N_1 \times z_1 - N'_2 \times z'_2 - N \times z_{g,N} + N \times Z_g$$

$$M_{pl,Rd} = N_1 \times e + N \times (z_g - z_{g,N})$$

En premier lieu on peut constater que dans ce cas, on est bel et bien en présence d'un couple définissant $M_{pl,Rd}$. De plus, dans le cas de sections doublement symétriques, il peut être noté que z_g est confondu avec $z_{g,N}$ c'est la raison pour laquelle le diagramme quadratique issue de la seule valeur $N_1 \times e$ est bien adapté à ce type de section. En revanche, dans le cas de section dissymétrique, omettre le terme $N \times (z_g - z_{g,N})$ peut entrainer de gros écarts de moment résistant.

Ainsi la différence avec les sections doublement symétrique réside dans le fait que l'effort équivalent N déduit du diagramme de contrainte de flexion composée a un centre de gravité ($z_{g,N}$) différent du centre de gravité de la section (z_g). Cet excentrement peut donc venir augmenter ou diminuer la résistance plastique de la section avec un diagramme non symétrique.

On peut donc conclure que pour connaître l'interaction exacte entre moment et effort axial, il suffit de partir du diagramme de contrainte plastique de flexion composée et de calculer :

$$M_{pl,Rd} = N1 \times z1 - N2 \times z2 + N \times z_g$$

Sachant que **pour de la flexion simple** on avait :

$$M_{pl,Rd} = N1 \times z1 - N2 \times z2.$$

De cette première étude on a pu en déduire le tracé du diagramme d'interaction M-N pour un té en faisant varier par incrément la valeur de N pour en déduire les différentes valeurs de $M_{pl,Rd}$ correspondantes.

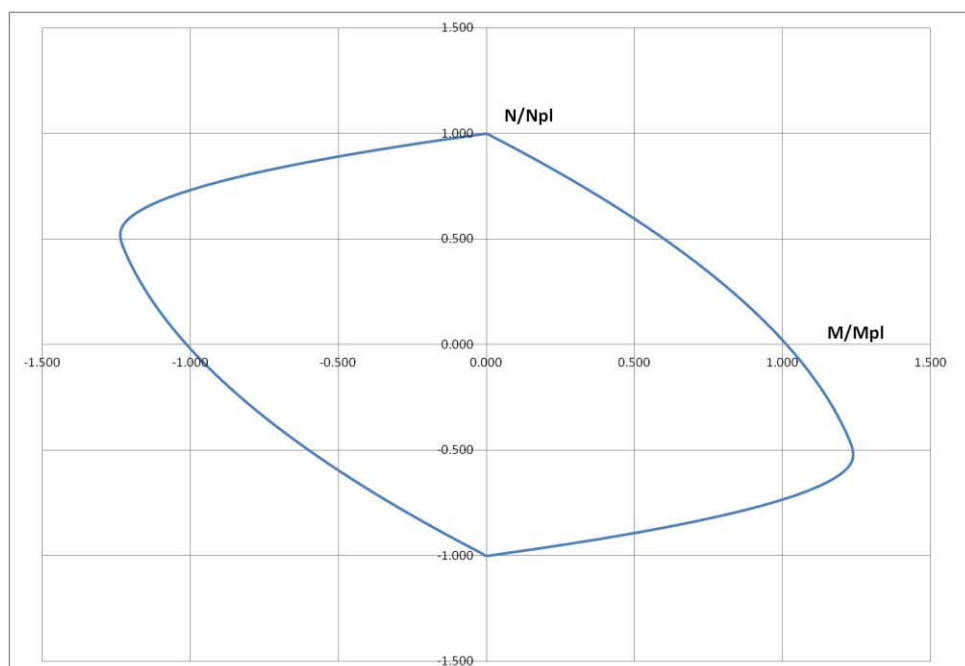


Figure 1-2 Diagramme d'interaction M-N plastique

Le calcul d'interaction est primordial dans le dimensionnement de poutre à ouvertures sinusoïdales. La discrétisation de la poutre en plusieurs quarts d'ouverture implique une combinaison d'effort qui doit être considérée de la manière la plus rigoureuse possible afin d'éviter d'utiliser des modèles in-sécuritaires ou au contraire, trop conservatifs. Le modèle utilisé se base sur le calcul de l'axe neutre plastique en flexion composée. Une fois l'axe neutre plastique déterminé, la forme du diagramme de contrainte plastique ainsi que le moment résistant final peuvent aisément être déduits en fonction de la part induite par l'effort axial.

2. INTERACTION M-N : FORMULE SIMPLIFIEE [BAP, 06-1,-2,-3]

Antonio Baptista, ingénieur recherche au LNEC a établi une formule approchée de l'interaction M-N pour des sections en I ou H mono-symétriques, pour lesquelles le congé de raccordement est négligé. Il sépare la section étudiée en trois blocs rectangulaires, deux semelles et l'âme.

2.1. Adaptation formule

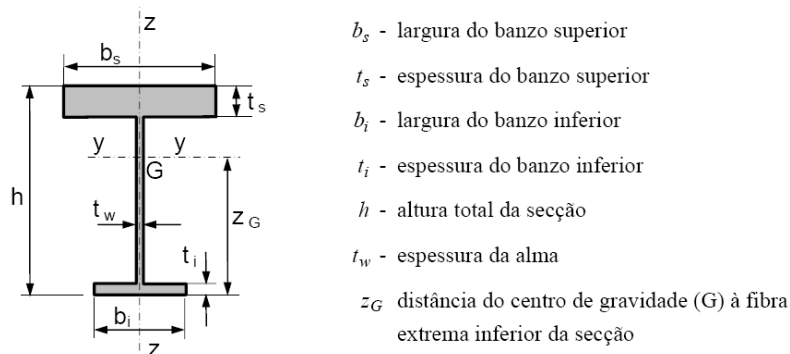


Figure 2-1 Modèle de section mono-symétrique traité par la formule d'interaction M-N

Le fait d'avoir séparé la section en trois parties rectangulaires permet d'adapter de manière simple les formulations à des sections en té en considérant un congé de raccordement. Le rectangle de l'âme initial deviendrait le rectangle du congé et le rectangle étant prévu initialement pour la semelle inférieure correspondrait à l'âme de la section en té. La **Figure 2-2** présente l'adaptation des termes définis par la **Figure 2-1**.

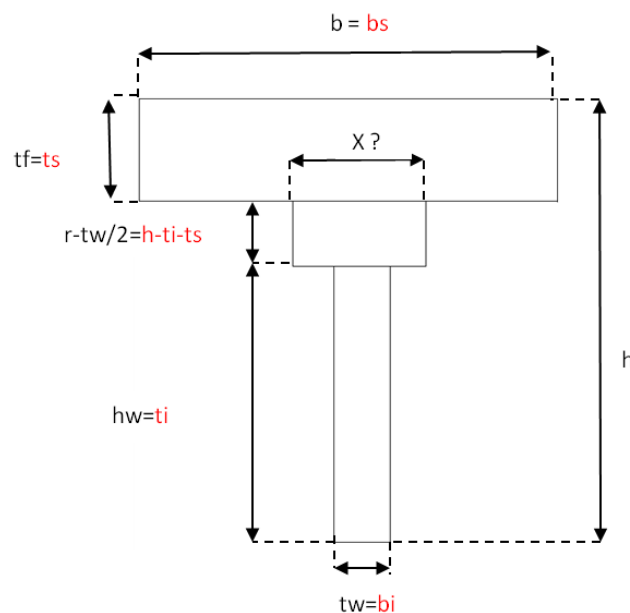


Figure 2-2 Adaptation de géométrie pour la formule d'interaction simplifiée

Afin d'adapter les formules utilisées pour des sections en I mono-symétriques aux sections en té, il s'agit de déterminer quelle largeur équivalente de congé de raccordement peut être utilisée pour représenter le congé de raccordement trapézoïdal proposé dans le modèle analytique. L'équivalence des surfaces entre un congé trapézoïdal et un congé rectangulaire permet d'écrire :

$$x = [tw \times (r-tw/2) + (r-tw/2)^2] / (r-tw/2)$$

Après adaptation de la formule, il s'agit d'étudier la pertinence des résultats fournis. L'idée a donc de comparer les résultats obtenus avec la formule simplifiée avec les résultats obtenus théoriquement en se basant sur le schéma de contrainte de flexion composée plastique pour un té avec congé de raccordement trapézoïdal. Par conséquent, l'aire équivalente du congé de raccordement choisie et celle du trapèze et non du congé de raccordement réel.

2.2. Application des formules [BAP, 06]

Cette partie présente les formules permettant de définir le moment résistant plastique en considérant l'interaction avec un effort axial N. Soient les rapports adimensionnels n et m tels que¹³ :

$$n = \frac{N_{Ed}}{N_{el,Rd}}$$

$$m = \frac{M_{pl,N,Rd}}{M_{el,Rd}}$$

Les formules d'interaction donnent :

- Equation (1) : $n_B < n < 1$

$$\frac{3 \times \alpha_G \times k_A}{4 \times k_I} (1 - n) \left[4(1 - \alpha_G) - \frac{(1 - n)k_A}{\alpha_B} \right] = m$$

- Equation (2) : $n_b < n < n_B$

$$\frac{12 \times \alpha_G}{4 \times k_I} \left[\alpha_G \times (1 + n) \times k_A + (1 - \alpha_b) \times \alpha_h^2 - \left[(1 + n) \times \frac{k_A}{2} + (1 - \alpha_b) \times \alpha_h \right]^2 \right] = m$$

- Equation (3) : $-1 < n < -n_b$

$$\frac{3 \times \alpha_G \times k_A}{4 \times k_I} (1 + n) \left[4 \times \alpha_G - \frac{(1 + n) \times k_A}{\alpha_b} \right] = m$$

¹³ Le choix d'utiliser M_{el} est dû au fait que dans les formules d'interaction, le rapport correspond à celui du moment sollicitant sur le moment résistant élastique.

Avec :

$$n_B = 1 - \frac{2\alpha_B\alpha_H}{k_A}$$

$$n_b = -1 + \frac{2\alpha_b\alpha_h}{k_A}$$

- $k_A = 1 + (\alpha_B - 1)\alpha_H + (\alpha_b - 1)\alpha_h$
- $\alpha_B = b_s/t_w$
- $\alpha_H = t_s/h$
- $\alpha_b = b_i/t_w$
- $\alpha_h = t_i/h$
- $\alpha_G = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (\alpha_B - 1)(2 - \alpha_H)\alpha_H + (\alpha_b - 1)\alpha_h^2}{1 + (\alpha_B - 1)\alpha_H + (\alpha_b - 1)\alpha_h} \right]$

3. VALIDATION DE LA METHODE SIMPLIFIEE

Ce paragraphe vise à valider l'adaptation que nous faisons de la formule simplifiée de Baptista au cas d'une section en té. Nous présentons une brève étude paramétrique qui compare les diagrammes d'interaction M-N obtenus d'une part à l'aide de la méthode analytique standard présentée au début de cette annexe avec la méthode simplifiée. L'étude paramétrique s'effectue sur trois paramètres :

- Gamme de profilé
- Limite d'élasticité
- Hauteur du té

Elle a pour objectif d'étudier la concordance des résultats obtenus avec la méthode de calcul avec les diagrammes de contraintes (avec un congé de raccordement approximé comme étant un trapèze) et celle développée dans la référence **[BAP, 06]**, méthode simplifiée qui peut s'avérer utile du fait de sa simplicité. Les gammes de profilés étudiés sont :

- IPE 270, 400, 600
- IPEA 400
- HE 450B, 340B, 280B, 450AA, 450M

Enfin l'étude paramétrique étudie l'influence de la hauteur des sections en té pour un même profilé, pouvant varier entre 50 et 350mm.

3.1. Etude en fonction du profilé

On considèrera donc les autres paramètres comme fixes. Ainsi le té étudié est de limite élastique S460, de hauteur de 200mm.

L'étude a pu montrer que les profilés utilisés n'influent pas sur les résultats, ceux-ci sont tous avec un écart inférieur à 0,025% et restent dans le domaine sécuritaire.

Cependant, pour la suite de l'étude, notamment sur la hauteur du té, il serait intéressant de faire l'étude sur deux types de profilés : IPE400 (correspond au profilé avec un des écarts les plus faibles) et HE340B (donnant des écarts les plus élevés).

3.2. Influence de la hauteur du té

La hauteur semble influencer sur la précision du calcul. Notamment lorsque la section en té est peu élancée. Plus la hauteur est importante et plus le modèle simplifié concorde avec la théorie. Cela est plus notable pour les profilés massifs. Cependant, quelque soit la hauteur, le profilé HEB340 donne des écarts toujours légèrement plus élevés que ceux de l'IPE400 ; en restant dans un domaine largement acceptable, écart maximal observé : 0,12%.

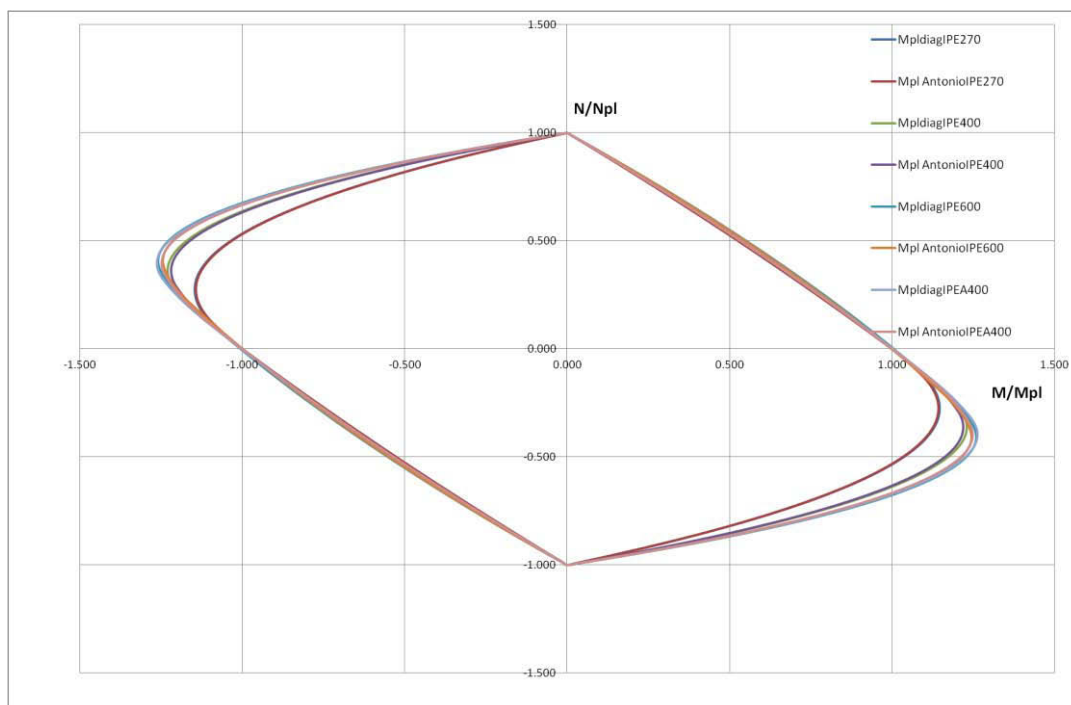


Figure 3-1 Etude de la précision de la formule simplifiée en fonction du profilé pour les IPE

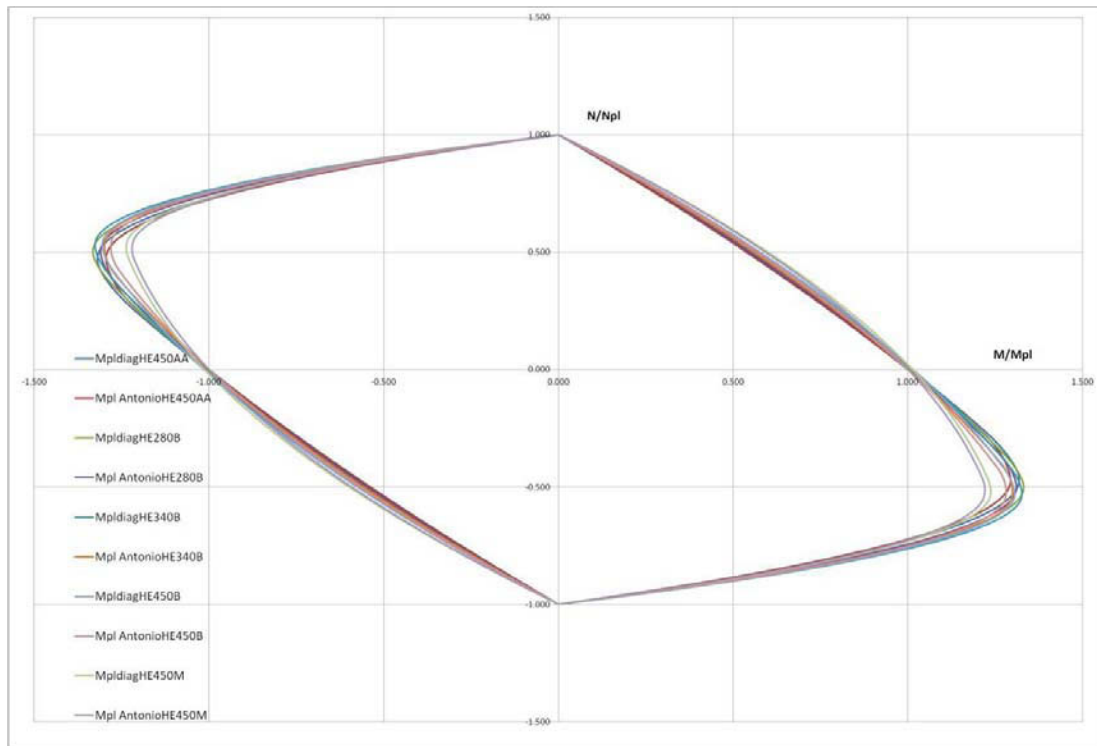


Figure 3-2 Etude de la précision de la formule simplifiée en fonction du profilé pour les HE

4. CONCLUSION

La méthode proposée est très facile d'utilisation et suit de manière très précise les résultats obtenus par calcul à partir des diagrammes de contrainte. Le fait de considérer un rectangle d'aire équivalente à celle du congé trapézoïdal n'implique qu'une erreur largement négligeable.

Ainsi, il peut être proposé d'utiliser cette approche simplifiée pour déterminer l'interaction M-N dans le cas de sections en té.

ANNEXE C

Rappels sur les plans d'expériences

1. PLAN D'EXPERIENCE

1.1. Etat de l'art ¹⁴[PIL, 01]

1.1.1. *A quoi sert un plan d'expérience*

Dans tous secteurs nous sommes amenés à devoir comprendre le fonctionnement d'un système. Un système réagit différemment suivant les entrées et différents facteurs. La mesure de sa réaction se fait au travers de ses réponses. A partir de différents essais, le plan d'expérience va essayer d'établir des relations de cause à effet entre la (ou les) réponses et les différents facteurs tout en minimisant le plus possible le nombre d'essais à effectuer.

1.1.2. *Démarche expérimentale*

« De façon naturelle, l'ingénieur fonde sa démarche d'acquisition des connaissances sur des essais en avançant progressivement, puis, il réoriente ses expériences en fonction des résultats obtenus. Il recherche en général à augmenter la productivité de ses essais. Pour cela, il doit :

- Faire un minimum d'essais
- Obtenir un maximum de précision sur les résultats
- Etre capable de mettre en évidence des phénomènes secondaires comme des interactions entre facteurs. »

Ensuite, la seconde difficulté est l'interprétation de ces résultats car souvent la quantité de données acquise est difficile à exploiter. Enfin, les nombreuses études menées peuvent amener à conclure que les essais effectués ne sont pas suffisant pour conclure sur l'étude : « Les essais que j'ai réalisés sont inutiles, par contre, j'aurais dû faire d'autres essais !! »

1.2. Problématique

Soit un problème lié à plusieurs facteurs. En simplifiant l'étude à deux facteurs, facteur A et facteur B, chacun de ces deux facteurs peut prendre plusieurs valeurs dans les intervalles $[A_{\min}; A_{\max}]$ et $[B_{\min}; B_{\max}]$.

La démarche intuitive est d'étudier séparément les deux facteurs, en fixant l'autre à une valeur moyenne. Si 4 valeurs pour chacun des deux facteurs sont choisies, au final l'étude nécessiterait alors

¹⁴ Les différentes parties en guillemets correspondent à des citations de la référence [PIL, 01]

8 essais. De cette façon, il est possible de savoir comment agit B pour A_{moyen} et comment agit A pour B_{moyen} . Cependant, cette approche ne donne aucune information quand à l'action de B quand A est maxi ou mini (et vis versa)¹⁵.

« Pour être capable de répondre de façon exhaustive à ces questions, il faut un maillage du domaine de validité des deux variables A et B et exécuter un test à chacun des nœuds du maillage. Dans ce cas simple, il faudrait réaliser : $4 \times 4 = 4^2 = 16$ essais pour avoir la connaissance du système. »

Pour le moment, les facteurs qui pourraient être potentiellement étudiés sont : a_0 , l_s , w , t_w , t_f , b et H_{tot} ce qui revient à 7 facteurs. Si l'étude devait nécessiter 4 essais par facteurs alors il faudrait réaliser :

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^7 = 16384$ modélisations !!

Ce serait certainement trop long. Comme il est impossible de descendre en dessous d'au moins 2 valeurs par variable. Une solution est donc de procéder par tâtonnement, ce qui peut prendre beaucoup de temps.

1.3. La méthode

La méthode des plans d'expérience permet d'apporter une démarche rigoureuse dans l'établissement des essais ou modélisations. Cette méthode consiste à établir un plan d'expérimentation comportant le minimum d'expériences compte tenu des résultats souhaités tout en apportant le maximum de précision dans les résultats. Ce plan d'expériences nous permettra non seulement de connaître l'influence des facteurs, mais également les interactions éventuelles entre certains facteurs. Il permettra une interprétation rapide et sans équivoque des résultats des essais en fournissant un modèle expérimental du système étudié. Dans un plan d'expériences, plusieurs facteurs sont modifiés d'une expérience à l'autre selon une règle précise. Aussi, contrairement à ce que l'on pense habituellement, cette particularité permet d'obtenir la meilleure précision possible dans les résultats.

1.4. Définitions

Facteur : un facteur est une variable, ou un état, qui agit sur le système étudié. (température, robinet ouvert ou fermé, mesure d'une longueur..)

Réponse : la réponse du système est la grandeur que l'on mesure pour connaître l'effet des facteurs sur le système. La réponse peut être de type quantitatif (poids, dispersion sur 30 pièces..) ou qualitatif (impression de chaud ou froid, présence ou non de coulure..). Les réponses quantitatives sont plus simples à traiter, ce qui correspond à notre cas d'étude.

¹⁵ Cette démarche est exactement celle effectuée précédemment sur l'analyse de l'influence de l_s sur la valeur du coefficient k_θ

Facteur significatif : Facteur lorsqu'il est modifié, modifie la réponse du système.

Niveau d'un facteur : Les niveaux d'un facteur indiquent les valeurs que prend ce facteur au cours des essais. Par exemple, si le facteur « Temps » a deux niveaux : 1mn, 3mn, il prendra au cours des essais, soit la valeur 1mn, soit la valeur 3mn.

Plan complet d'expérience : L'étude d'un plan complet consiste à étudier toutes les combinaisons possibles des facteurs pris en considération dans l'expérience. On note ce plan X^k ce qui signifie que cette expérimentation concerne un système comportant k facteurs à X niveaux. Le nombre d'expériences nécessaires pour l'ensemble des combinaisons est donc par exemple pour : 3 facteurs à 2 niveaux et 2 facteurs à 4 niveaux : $2^3 + 4^2 = 128$ expériences.

1.5. Interaction des facteurs

Il s'agit dans ce paragraphe de décrire brièvement ce que signifie une interaction entre facteurs. Les facteurs étudiés sont : a_0 , l_s , w , t_w , t_f , b , H_{ini} .

AS012: IPE 450:

- $t_w = 9.4\text{mm}$
- $t_f = 14.6\text{mm}$
- $b = 190\text{mm}$
- $H_{ini} = 450\text{mm}$
- $a_0 = 450\text{mm}$
- $l_s = 638\text{mm}$
- $w = 205\text{mm}$

Liés par le profilé choisi

Il est choisit d'étudier l'existence d'une interaction entre les facteurs a_0 et l_s :

$a_0 = 350$ et 450mm

$l_s = 500$ et 638mm

Le **Tableau 12** présente les résultats de l'analyse de l'interaction entre les facteurs a_0 et l_s . Le tableau donne la valeur du coefficient k_θ suivant les valeurs des deux facteurs a_0 et l_s .

Test n°	a_0	l_s	k_θ
1	350	500	2.25×10^6
2	350	638	2.45×10^6
3	450	500	2.02×10^6
4	450	638	2.25×10^6

Tableau 12 Résultats de l'analyse de l'interaction entre les facteurs a_0 et l_s

Il peut être constaté que si a_0 passe du niveau 1 (350) au niveau 2 (450), k_θ varie pour un même l_s . De même, en faisant varier l_s pour un même a_0 , on observe que k_θ varie. Par contre, en faisant varier les deux simultanément, la valeur de k_θ ne change pas. Il serait donc intéressant de faire un troisième essai pour une troisième valeur des deux facteurs, $a_0 = 400\text{mm}$ et $l_s = 400\text{mm}$ qui donne une valeur de $k_\theta = 1.81 \times 10^6$. Il peut donc être notifié que la valeur identique de k_θ obtenu précédemment en faisant varier simultanément a_0 et l_s n'était qu'une coïncidence. Il existerait donc une possible interaction entre les facteurs a_0 et l_s .

Remarque :

Il est impossible d'étudier les interactions si nous faisons varier un facteur à la fois.

1.6. Plans complet :

1.6.1. Construction du plan :

Lorsque n facteurs sont étudiés avec chacun le même nombre de niveau X alors le plan complet permettant d'étudier toutes les combinaisons possibles de ces facteurs est un plan qui comprend X^n essais. Par exemple, si un système de trois facteurs (A, B et C) à deux niveaux (pour leurs valeurs min et max) est étudié alors le nombre d'essais à effectuer est $2^3 = 8$ essais. Le **Tableau 13** fournit l'exemple d'un plan complet 2^3 avec les trois facteurs A, B et C et la réponse Y en fonction des différentes combinaisons des différents niveaux des 3 facteurs étudiés.

Essai n°	A	B	C	Y
1	1	1	1	43
2	1	1	2	45
3	1	2	1	54
4	1	2	2	57
5	2	1	1	60
6	2	1	2	61
7	2	2	1	78
8	2	2	2	81

Tableau 13 Exemple de plan complet à 3 facteurs à 2 niveaux

1.6.2. Dépouillement et interprétation

Le dépouillement et l'interprétation des résultats passent par une première étape, le calcul des effets des différents facteurs. L'effet d'un facteur permet d'illustrer l'influence isolée de chaque facteur (de manière un peu similaire à ce qui a été fait au départ lors de l'étude de l'influence du paramètre l_s , paragraphe 0).

L'étude présentée ci-après sert d'exemple afin d'illustrer les notions d'effet et d'interaction des facteurs, elle sera ainsi basée sur les données fournies dans l'exemple du **Tableau 13**.

1.6.2.1. Moyennes

Dans un premier temps, il faut calculer les moyennes de chaque facteur pour chaque niveau, moyenne pour A1 (facteur A au niveau 1), A2, B1, B2, C1 et C2. La moyenne générale des essais du **Tableau 13** fait 60. Le **Tableau 14** donne les valeurs des moyennes des résultats pour chaque niveau de chaque facteur.

M=60	A	B	C
Niveau 1	50.25	52.25	59.00
Niveau 2	69.75	67.75	61.00

Tableau 14 Tableau des moyennes

1.6.2.2. Graphe des effets

Sur le graphique on trace une droite reliant les deux points de chaque moyenne calculée pour chaque facteur. Ainsi, par exemple, pour le facteur A, on a deux points : A1 et A2. La droite reliant les deux points correspond à la droite d'effet du facteur A.

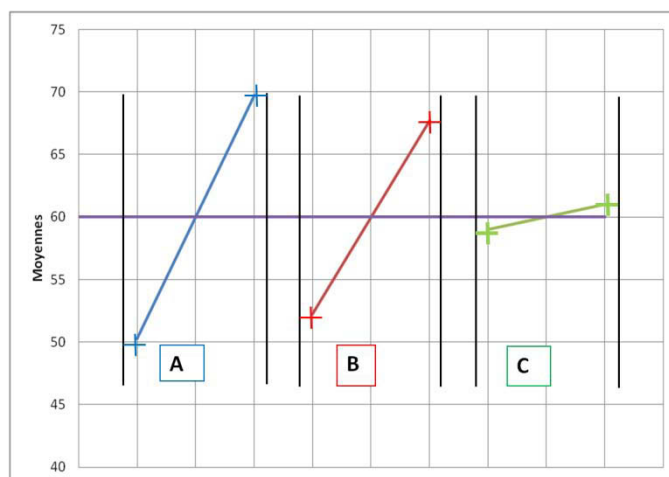


Figure 1-1 Graphe des effets des facteurs A, B et C

Le graphe des effets de la **Figure 1-1** montre que le facteur C semble avoir bien moins d'influence sur la réponse que les facteurs A ou B. En effet, le fait que le facteur C passe du niveau 1 au niveau 2 ne change pas beaucoup la valeur de la réponse.

1.6.2.3. Tableau des moyennes pour les interactions

Pour étudier l'interaction entre les facteurs, il est nécessaire d'effectuer un tableau dans lequel les moyennes des réponses pour la combinaison d'un facteur à un niveau donné avec un autre facteur à un autre niveau sont calculées, comme détaillé dans l'exemple des **Tableau 15** à **Tableau 17**.

	B	
	1	2
A1	45.5	55
A2	59	80.5

Tableau 15 Tableau des moyennes pour l'interaction A-B

	C	
	1	2
A1	49	51.5
A2	69	70.5

Tableau 40 Tableau des moyennes pour l'interaction A-C

La valeur 69 est obtenue en faisant la moyenne des essais lorsque A=2 et C=1.

	C	
	1	2
B1	51	53.5
B2	67	68.5

Tableau 17 Tableau des moyennes pour l'interaction B-C

1.6.2.4. Graphe des interactions

Une droite reliant les deux points de chaque moyenne calculée pour chaque facteur est tracée sur le graphique des effets. Ainsi, par exemple, pour le facteur A existe deux points : A1 et A2. La droite reliant les deux points correspond à la droite d'effet du facteur A.

De même pour le graphe des interactions, deux droites pour les valeurs d'interaction AB sont tracées, une droite pour B=1 et une seconde pour B=2. Il s'agit ensuite d'observer sur les graphes si les deux droites de chaque interaction sont parallèle ou non. Le fait que les deux droites soient parallèles signifie que l'interaction n'est pas significative.

1.6.2.5. Calcul des effets et des interactions

Une formule générale permet de calculer l'effet d'un facteur tel que :

$E_{A(\text{niveau } 2)} = (\text{moyenne des réponses lorsque le facteur A est au niveau 2}) - \text{moyenne générale des réponses}$.

Remarque :

Cette formule revient à considérer des valeurs relatives des moyennes de chaque facteurs. Sur le graphe des moyennes donné **Figure 1-1** cette fois on aura la même allure avec comme repère non plus la moyenne générale à 60 mais 0.

Si la formule est appliquée alors il apparaît que $E_{A1} = 50.25 - 60 = -9.75$ et E_{A2} vaut l'exact opposé : 9.75 **car la somme des $E_{Ai} = 0$. Ainsi, si seulement deux niveaux par facteur ont été utilisés $E_{A1} + E_{A2} = 0$.**

Pour le calcul des interactions, la formule générale de calcul des interactions s'écrit:

$$I_{AiBj} = \text{Moyenne des réponses lorsque } (A=i, B=j) - M - E_{Ai} - E_{Bj}$$

$$I_{A1B1} = 45.5 - 60 - (-9.75) - (-7.75) = +3$$

Les interactions $I_{A1B2} = -3$; $I_{A2B1} = -3$; $I_{A2B2} = +3$ peuvent ensuite être déduites.

	B1	B2
A1	$I_{A1B1}=+3$	$I_{A1B2}=-3$
A2	$I_{A2B1}=-3$	$I_{A2B2}=+3$

Tableau 42 Tableau des interactions des facteurs A et B

Il peut être observé que la somme des lignes ainsi que la somme des colonnes sont égales à zéro. Il suffit de trouver une interaction pour déduire les autres. Le nombre de degrés de liberté (ddl) de cette interaction AB est donc de 1. Il est possible de montrer que le nombre de degrés de liberté d'une interaction est égal au produit des degrés de liberté (ddl) de chacun des deux facteurs. **[PIL, 01]**

Ici, **ddl(A)=1, ddl(B)=1** ainsi **ddl(AB)=1*1=1**.

1.7. Calcul de la réponse théorique

$$Y \sim = M + A + B + C + AB + AC + BC$$

Pour chaque essai, il est possible de calculer une réponse théorique $Y \sim$ égale à l'addition de tous les effets et des interactions. Ainsi, pour l'essai n°1, en ne retenant que les effets principaux et l'interaction AB, la réponse théorique donne :

$$Y \sim 1 = 60 - 9.75 - 7.75 - 1 + 3 = 44.5$$

La valeur exacte de l'essai n°1 donné au **Tableau 13** est de 43. Ainsi, dans cet exemple, ne considérer que l'interaction AB semble fournir une réponse théorique suffisamment réaliste. Ensuite il s'agit de calculer le résidu qui correspond à la soustraction entre la valeur réelle et celle obtenue avec la réponse théorique. Dans l'exemple précédent, le résidu pour le test 1 : Résidu = 43 – 44.5 = 1.5.

1.8. Validation des résultats

La validation des résultats consiste à vérifier si les hypothèses retenues au départ du plan d'expériences sont bien vérifiées. La validation consiste à réaliser un essai complémentaire **en dehors des essais du plan d'expérience** pour valider le modèle de comportement obtenu par le plan d'expériences.

Dans le cas d'un plan complet, tous les nœuds du maillage ont été testés. On a donc pu calculer toutes les interactions. Il reste cependant l'hypothèse de linéarité de la réponse à vérifier. Pour cela, on fait un essai au centre du domaine d'étude. Si la linéarité des facteurs est vérifiée, le résultat de cet essai sera égal à la moyenne des essais du plan d'expérience.

2. BILAN

Le premier bilan des connaissances détaillées dans cette partie nous permet d'identifier le principal problème lié à notre étude, le nombre important de facteur. En effet, utiliser 7 facteurs implique un nombre d'essais, même numériques, relativement conséquent dans le cas d'une étude complète afin de considérer l'influence de toutes les interactions entre facteurs. Ainsi, une solution proposée par la littérature est de se référer à des méthodes permettant de constituer des plans fractionnaires qui diminuent grandement le nombre d'essais, en permettant de concentrer le nombre d'essais sur les combinaisons importantes pour les facteurs et interactions que l'utilisateur aura jugé pertinents d'étudier. Les tables de Taguchi peuvent être un outil très puissant pour effectuer ce genre de plans fractionnés. Cependant, le fait de sélectionner les interactions importantes requiert un recul suffisant sur le phénomène étudié. Hors, le problème traité est assez vaste et il est quasiment impossible de dégager de forte interactions par rapport à d'autres. Etant donné le manque de connaissance et de maîtrise dans le domaine des plans d'expériences, il serait plus ingénieux de commencer par une première étude simpliste pour chercher à maîtriser le modèle et pour ensuite pouvoir se lancer dans une étude plus approfondie. C'est pourquoi il est proposé de commencer par une stratégie de balayage pour les 7 facteurs en considérant 2 à 3 niveaux pour chacun. Un premier dépouillement des résultats permettra d'estimer l'influence de chacun des paramètres et de se faire une première prise en main des outils de plans d'expériences.

Ensuite, on peut remarquer que parmi ces 7 paramètres, 4 d'entre eux sont liés par un seul, Hini, tf, tw et b sont liés par le profilé originel. En effet, on pourrait donc opter de choisir une étude se basant sur un plan complet de 3 paramètres (a0, ls et w) pour chaque profilé. Cependant, les profilés existant sont très divers, mais peut-être que l'on pourrait les regrouper dans différentes famille (IPE, HEB, HEM..)

Référence site : www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressource&id=19

3. REGRESSION MULTILINEAIRE : METHODE DE LA SURFACE DE REPONSE

Ce paragraphe rappelle la méthode qui permet d'utiliser la matrice de résultats pour définir une loi polynomiale qui caractérise la surface de réponse.

Le choix a été d'utiliser un modèle polynomial du second degré. L'étude fournit « n » résultats (n=27). Pour chaque expérience « i » la valeur du modèle théorique $E(y_i)$ donne une valeur du coefficient de maintien rotationnel qui diffère de la valeur mesurée $y(i)$ d'une quantité e_i . Les valeurs mesurées peuvent donc être écrites $y_i = E(y_i) + e_i$.

L'hypothèse qui est faite est que pour tout i, les écarts e_i sont des variables aléatoires de moyenne nulle $E(e_i) = 0$ et de même variance. La relation $y_i = E(y_i) + e_i$ pour tout i, entraîne le

système d'équations linéaires pour lequel les valeurs des facteurs sont déduites de la matrice d'expérimentation du **Tableau III-7**:

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{01} + \dots + \alpha_{33} w_1^2 + e_1$$

.

.

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 a_{0i} + \dots + \alpha_{33} w_i^2 + e_i$$

.

.

$$y_n = \alpha_0 + \alpha_1 a_{0n} + \dots + \alpha_{33} w_n^2 + e_n$$

Avec $n \geq k+1$ (k: nombre de facteurs étudiés égal à 9 car le modèle mathématique considère les produits de facteurs comme des facteurs)

Les valeurs exactes des coefficients $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{33}$ ne peuvent jamais être obtenues. Ainsi une estimation de ces coefficients qui minimise la somme des carrés des différences e_i sont recherchés. La solution doit satisfaire le critère des moindres carrés tel que :

$$\sum e_i^2 = \text{valeur minimale}$$

Le principe est de chercher le modèle du second ordre qui passe au plus près des points expérimentaux. En usant d'une écriture matricielle, cela donne :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & \dots & a_{01} * w_1 & \dots & w_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{0i} & \dots & a_{0i} * w_i & \dots & w_i^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{0n} & \dots & a_{0n} * w_n & \dots & w_n^2 \end{pmatrix}$$

Le système qui doit être résolu est :

$$Y = XA + E$$

Le critère de moindre carré donne :

$$E^t E = \text{valeur minimale}$$

En dérivant " $E^t E$ " en fonction des inconnues de la matrice A, cela donne l'équation :

$$\frac{\partial E^t E}{\partial A} = \frac{\partial(Y^t Y)}{\partial A} - 2 \frac{\partial(A^t X^t Y)}{\partial A} + \frac{\partial(A^t X^t X A)}{\partial A} \quad \text{Equation V-13}$$

- $Y^t Y = \text{constante}$, ainsi, sa dérivée par rapport à A est nulle
- $A^t X^t Y$ est linéaire par rapport à A , ainsi sa dérivée est $X^t Y$
- $A^t X^t X A$ est quadratique en A ainsi sa dérivée est $2X^t X A$.

Finalement il arrive:

$$\frac{\partial E^t E}{\partial A} = -2X^t Y + 2X^t X A = 0 \quad \text{Equation V-14}$$

Si la matrice $X^t X$ n'est pas singulière, l'estimation \tilde{A} de A qui minimise " $E^t E$ " est:

$$\tilde{A} = (X^t X)^{-1} (X^t Y)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_k \end{pmatrix}$$

Remarque : \tilde{A} n'existe que si $X^t X$ n'est pas singulière. Il est facile de vérifier que nous obtenons une matrice singulière si, dans la matrice X :

- Deux colonnes sont proportionnelles,
- Ou si une colonne est une combinaison linéaire d'autres colonnes.

Le modèle final est déterminé au travers d'une résolution d'un système composé de matrices grâce au modèle de résolution mathématique de MAPPLE. Cette résolution donne la loi polynomiale qui permet de quantifier le coefficient de maintien rotationnel k_θ en fonction des paramètres géométriques d'ouverture a_0 , ls et w .

$$k_\theta = \alpha_0 - \alpha_1 \times a_0 + \alpha_2 \times ls + \alpha_3 \times w + \alpha_4 \times a_0^2 + \alpha_5 \times ls^2 + \alpha_6 \times w^2 \\ + \alpha_7 \times a_0 \times ls + \alpha_8 \times a_0 \times w + \alpha_9 \times ls \times w$$

**Equation
V-15**

Annexe D

Critère de plaque appuyée

Cette partie propose d'établir un critère pour savoir s'il faut utiliser le modèle développé ou passer à une vérification similaire à celle d'une plaque appuyée sur les 4 bords. Il a été montré précédemment que ce critère était surtout fonction du rapport de contraintes sollicitantes ψ . En effet, pour une valeur négative de ce rapport, le mode de ruine d'une plaque en console peut s'apparenter à celui d'une plaque appuyée sur 4 bords (déformée maximale hors plan au niveau des fibres du milieu de la plaque). En effet, sous des contraintes de traction, les fibres du bord libre sont stabilisées. Il s'agit de déterminer à partir de quelle valeur de ce rapport ψ le changement de mode s'opère.

Dans le cas d'un chargement avec $\Psi = -0.3$ et une configuration de plaque telle que $a/b = 1.8$, le mode de ruine entre les deux modèles diffère comme décrit par les **Figure 1**.

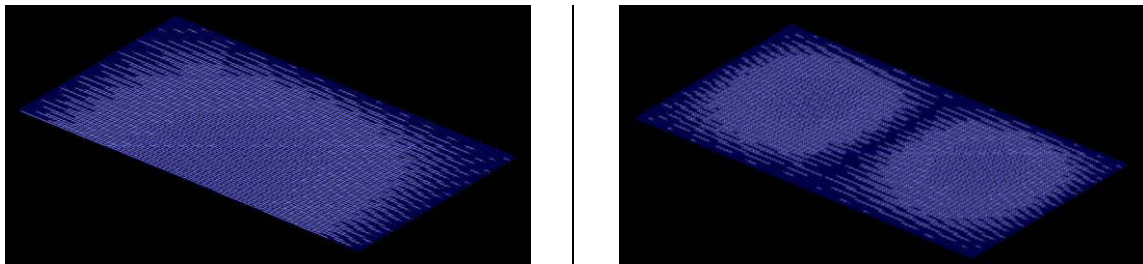


Figure 1 Premier mode pour une plaque en console (à gauche) et appuyée (à droite) avec $\Psi = -0.3$

Les modes de ruine diffèrent tout comme la valeur de la contrainte critique. En effet, le cas de plaque en console est bien moins rigide.

Ensuite pour le cas $\psi = -0.4$, les modes de ruines sont plus similaires et un changement de mode pour la plaque en console s'opère avec une déformée modale proche du modèle de plaque appuyée sur 4 bords (voir **Figure IV-31**). Il s'agit maintenant d'effectuer une étude paramétrique sur le rapport a/b afin de vérifier que cette valeur limite de ψ peut être considérée comme valable quelque soit la forme de la plaque.

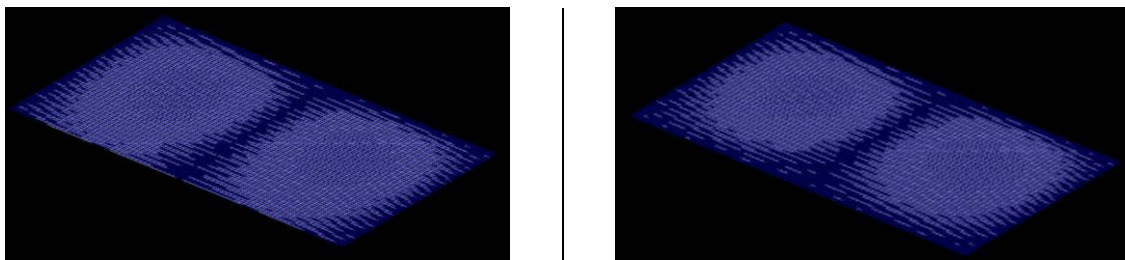


Figure 2 Premier mode de voilement pour la plaque en console (à gauche) et appuyée (à droite) avec $\psi = -0.4$

Seule une étude paramétrique sur la valeur de la contrainte critique permettra d'estimer la qualité de l'approximation qui est de considérer qu'une plaque appuyée sur 3 bords se comporte à l'identique qu'une plaque appuyée sur 4 bords.

Le **Tableau 1** présente la comparaison des efforts critiques et des modes de ruine entre les deux modèles de plaque modélisés sur CAST3M en fonction du rapport a/b. Ce tableau donne aussi les valeurs des contraintes critiques proposées par l'Eurocode pour les 2 cas de plaque (appuyée et en console) afin de comparer ces résultats avec la valeur MEF. L'écart entre les contraintes critiques obtenues avec le modèle MEF est donné en faisant le rapport de la valeur de la contrainte critique du modèle de plaque en console avec celle du modèle de plaque appuyée.

- $\Psi = -0.5$

a/b	σ_{cr} MEF Appuyé	Mode de voilement MEF Appuyée	σ_{cr} MEF Console	Mode de voilement MEF Console	ECART : MEF console/MEF appuyée	σ_{cr} EC3 console	σ_{cr} EC3 appuyée	Ecart :MEF appuyée/EC3 appuyée
0.5	319,05	1 demi-onde	318,86	1 demi-onde	1,00	160,86	254,33	1.25
1	250,84	1 demi-onde	243,00	1 demi-onde	0,97	160,86	254,33	0.96
1,2	266,99	1 demi-onde	252,94	1 demi-onde	0,95	160,86	254,33	0.99
1,4	260,39	2 demi-ondes	258,65	2 demi-ondes	0,99	160,86	254,33	1.02
1,6	250,86	2 demi-ondes	247,59	2 demi-ondes	0,99	160,86	254,33	0.97
1,8	248,39	2 demi-ondes	243,08	2 demi-ondes	0,98	160,86	254,33	0.96
2	251,01	2 demi-ondes	243,19	2 demi-ondes	0,97	160,86	254,33	0.96
2,5	249,40	3 demi-ondes	245,52	3 demi-ondes	0,98	160,86	254,33	0.97
3	251,03	3 demi-ondes	243,24	3 demi-ondes	0,97	160,86	254,33	0.96
4	250,87	4 demi-ondes	243,30	4 demi-ondes	0,97	160,86	254,33	0.96
5	249,68	6 demi-ondes	243,37	6 demi-ondes	0,97	160,86	254,33	0.96

- $\Psi = -0.4$

a/b	σ_{cr} MEF Appuyé	Mode de voilement MEF Appuyée	σ_{cr} MEF Console	Mode de voilement MEF Console	ECART : MEF console/ME F appuyée	σ_{cr} EC3 console	σ_{cr} EC3 appuyée	Ecart :MEF appuyée/EC3 appuyée
0,50	295,18	1 demi-onde	294,57	1 demi-onde	1,00	122,16	225,69	1.31
1,00	221,65	1 demi-onde	205,74	1 demi-onde	0,93	122,16	225,69	0.91
1,20	233,93	1 demi-onde	206,40	1 demi-onde	0,88	122,16	225,69	0.91
1,40	235,29	2 demi-ondes	214,50	1 demi-onde	0,98	122,16	225,69	0.95
1,60	224,64	2 demi-ondes	217,45	2 demi-ondes	0,97	122,16	225,69	0.96
1,80	220,80	2 demi-ondes	209,65	2 demi-ondes	0,95	122,16	225,69	0.93
2,00	221,81	2 demi-ondes	205,91	2 demi-ondes	0,93	122,16	225,69	0.91
2,50	222,76	3 demi-ondes	208,11	2 demi-ondes	0,93	122,16	225,69	0.92
3,00	221,85	3 demi-ondes	205,98	3 demi-ondes	0,93	122,16	225,69	0.91
4,00	221,88	4 demi-ondes	206,06	4 demi-ondes	0,93	122,16	225,69	0.91
5,00	221,93	5 demi-ondes	206,16	5 demi-ondes	0,93	122,16	225,69	0.91

- $\Psi = -0.3$

a/b	σ_{cr} MEF Appuyé	Mode de voilement MEF Appuyée	σ_{cr} MEF Console	Mode de voilement MEF Console	ECART : MEF console/MEF appuyée	Sigma EC3 console	σ_{cr} EC3 appuyée	Ecart :MEF appuyée/EC3 appuyée
0,50	273,16	1 demi-onde	271,72	1 demi-onde	0,99	89,95	200,76	1.35
1,00	197,36	1 demi-onde	170,78	1 demi-onde	0,87	89,95	200,76	0.85
1,20	206,98	1 demi-onde	162,73	1 demi-onde	0,79	89,95	200,76	0.81
1,40	213,23	2 demi-ondes	160,18	1 demi-onde	0,77	89,95	200,76	0.80

1,60	202,08	2 demi-ondes	160,88	1 demi-onde	0,80	89,95	200,76	0.80
1,80	197,48	2 demi-ondes	163,63	1 demi-onde	0,83	89,95	200,76	0.82
2,00	197,50	2 demi-ondes	167,72	1 demi-onde	0,85	89,95	200,76	0.84
2,50	199,97	2 demi-ondes	161,95	2 demi-ondes	0,81	89,95	200,76	0.81
3,00	197,54	3 demi-ondes	160,53	2 demi-ondes	0,81	89,95	200,76	0.80
4,00	197,58	4 demi-ondes	160,97	3 demi-ondes	0,81	89,95	200,76	0.80
5,00	197,63	5 demi-ondes	162,20	3.5 demi-ondes	0,82	89,95	200,76	0.81

- $\Psi = -2$

a/b	σ_{cr} MEF Appuyé	Mode de voilement MEF Appuyé	σ_{cr} MEF Console	Mode de voilement MEF Console	ECART : MEF console/MEF appuyée	σ_{cr} EC3 console	σ_{cr} EC3 app	Ecart :MEF appuyée/EC3 appuyée
0,50	967,99	1 demi-onde	967,99	1 demi-onde	1,00	451,72	1021,50	0.95
1,00	959,73	2 demi-ondes	959,73	2 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.94
1,20	960,85	3 demi-ondes	960,85	3 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.94
1,40	950,23	2 demi-ondes	950,23	2 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.93
1,60	957,85	3.5 demi-ondes	957,85	3.5 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.94
1,80	948,21	4 demi-ondes	948,21	4 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.93
2,00	953,34	4 demi-ondes	953,34	4 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.93
2,50	950,66	5 demi-ondes	950,66	5 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.93
3,00	949,02	6.5 demi-ondes	949,02	6.5 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.93
4,00	948,45	9 demi-ondes	948,45	9 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.93

5,00	949,68	11 demi-ondes	949,67	11 demi-ondes	1,00	451,72	1021,50	0.93
------	--------	---------------	--------	---------------	------	--------	---------	------

Tableau 1 Etude comparative des modèles de plaque appuyée sur 3 bords et appuyée sur 4 bords pour différentes valeurs de ψ et a/b

Cette petite étude nous permet de considérer qu'une plaque en console, chargé avec un diagramme de contraintes axiales linéaire avec la contrainte de compression maximale au niveau de l'appui, peut être considérée comme une plaque appuyée sur ses quatre bords dès lors que le rapport de contrainte ψ est négatif (bord libre tendu) et inférieur ou égal à -0.4. Pour des valeurs de ψ supérieures à -0.4, les écarts de charges critiques entre le modèle de plaque en console et celui de plaque appuyée sont plus importants. Ce qui s'explique notamment par la différence de mode de ruine entre les deux modèles de plaque.

La comparaison des contraintes critiques obtenues numériquement et celles données par l'Eurocode 3 pour une plaque en console, permet de voir que la norme reste très sécuritaire. Ainsi comme il a été constaté qu'à partir d'un rapport $\psi < -0.4$, la plaque se comporte de manière similaire (modes de voilement et efforts critiques) à une plaque appuyée, il est proposé d'utiliser non pas le critère fourni pour une plaque en console mais reprendre celui d'une plaque appuyée qui permet ainsi d'améliorer la qualité des résultats analytiques donnés par l'Eurocode vis-à-vis des résultats numériques.

Le **Tableau 1** montre que les écarts de charge critique du modèle MEF et de l'Eurocode restent acceptables, même pour les cas de rapport a/b faibles. Par conséquent nous préconisons d'utiliser le critère de l'Eurocode de plaque appuyée pour définir la contrainte critique d'une plaque en console dont le bord libre est tendu avec un chargement linéaire de rapport $\psi < -0.4$. De plus, dans les cas de plaques courtes (c'est-à-dire des plaques avec un rapport $a/b < 0.5$) il est conseillé d'utiliser la résolution de l'**Equation IV-19** pour plus de précisions. Les préconisations sont résumées dans le **Tableau IV-5**.

Annexe E

Résolution du cadre hyperstatique

1. CALCUL RDM

L'hypothèse générale pour traiter le problème d'une poutre avec des ouvertures rectangulaires uniformément réparties revient à considérer que la poutre fonctionne comme une poutre échelle chargée en ses nœuds. Le problème d'une poutre échelle est relativement lourd à traiter de manière analytique. Ainsi, il est plus simple de partir d'un modèle simplifié en n'étudiant qu'un cadre hyperstatique en console comme illustré à la **Figure 1-1**. Ce cadre est hyperstatique interne de degré 3 et isostatique externe avec une charge nodale à son extrémité. Une première étude sur le logiciel de calcul de RDM permet de mettre en évidence que les moments fléchissant dans les membrures sont bitriangulaires comme observé sur un cadre de poutre échelle.

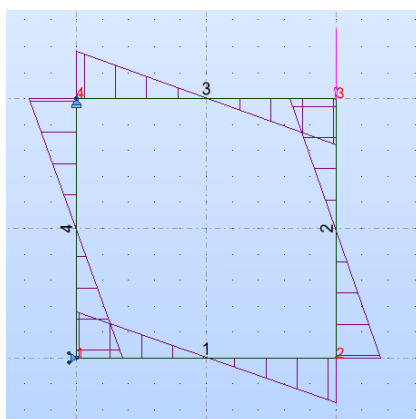


Figure 1-1 Représentation du cadre en console avec les diagrammes des moments fléchissant dans chaque membrure à l'aide du logiciel ROBOT

Barre/Nœud/Cas	FX [kN]	FZ [kN]	MY [kNm]
1/ 1/ 2	4,99	4,99	-5,00
1/ 2/ 2	4,99	4,99	4,98
2/ 2/ 2	4,99	-4,99	4,98
2/ 3/ 2	4,99	-4,99	-5,00
3/ 3/ 2	-4,99	-5,01	5,00
3/ 4/ 2	-4,99	-5,01	-5,02
4/ 4/ 2	-4,99	-5,01	5,02
4/ 1/ 2	-4,99	-5,01	-5,00

Figure 1-2 Résultats des efforts dans chaque nœud du cadre hyperstatique avec une hauteur égale à la longueur

La **Figure 1-2** donne le tableau de résultats du logiciel de calcul Robot et montre que les moments aux 4 coins du cadre sont maxima et égaux au signe près. De ce fait si les membrures du cadre ont des sections dissymétriques, l'interaction M-N sera linéaire pour 2 nœuds et quadratique pour les deux autres.

Analytiquement, ce système peut se résoudre en effectuant une coupure dans une des barres libérant ainsi trois degrés de liberté (N, V et M). Ces trois efforts seront retranscrits comme les inconnues hyperstatiques. Le système isostatique de référence S_0 est présenté à la **Figure 1-3**.

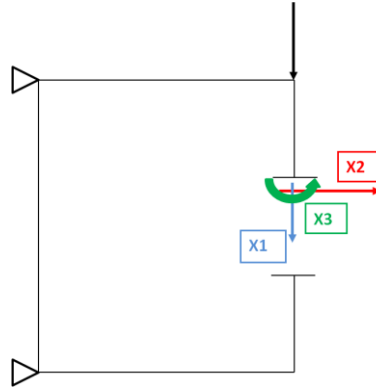


Figure 1-3 Modèle isostatique utilisé pour la résolution du cadre hyperstatique

Dans ce système isostatique de référence S_0 , nous définissons les déplacements :

- δ_{ij}^0 : déplacement relatif (dans S_0) des lèvres de la coupure i (dans la direction i) due à une force unité agissant dans la coupure j (dans la direction j).
- δ_{iF}^0 : déplacement relatif (dans S_0) des lèvres de coupure i (dans la direction i) produit par la force extérieure F .

Le déplacement total δ_i due à l'effort F dans le système initial de cadre hyperstatique (exposant n pour nominal) vaut :

$$\delta_{i,F}^n = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}^0 X_j + \delta_{i,F}^0$$

Avec X_j l'inconnue hyperstatique de direction j . (X_1 , X_2 ou X_3 de la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

Ces équations sont écrites pour $i=1, 2$ et 3 . Soit un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues. Ces équations sont les équations générales de la méthode des forces. Elles représentent les équations de compatibilité des déplacements relatifs aux 3 coupures simples pratiquées sur le cadre hyperstatique. Au droit des coupures pratiquées, généralement les termes $\delta_{i,F}^n$ sont nuls du fait de la continuité matérielle qui exclut tout déplacement relatif.

Il peut ensuite être déduit les efforts internes à la structure :

$$M_F^n = M_F^0 + \sum_{j=1}^3 m_j^0 X_j$$

$$V_F^n = V_F^0 + \sum_{j=1}^3 v_j^0 X_j$$

$$N_F^n = N_F^0 + \sum_{j=1}^3 n_j^0 X_j$$

Les déplacements relatifs δ_{iF}^0 et δ_{ij}^0 sont calculés en négligeant l'effet de l'effort tranchant tel que :

$$\partial_{iF}^0 = \int_0^S \frac{m_i^0 M_F^0}{EI} \cdot ds + \int_0^S \frac{n_i^0 N_F^0}{EA} \cdot ds$$

A l'aide des intégrales de Mohr, il est possible de retrouver les valeurs des différents déplacements relatifs en fonction de la hauteur et de la longueur du cadre ainsi que de l'inertie des membrures du cadre (considérée comme constante pour simplifier le modèle).

2. FEUILLE MAPPLE DE RESOLUTION

$$d_{1F}^0 = \frac{1}{EI} \times F \times L^2 \left(\frac{H}{2} + \frac{L}{3} \right)$$

$$d_{2F}^0 = \frac{1}{EI} \times \left(-\frac{F \times L}{12} H^2 - \frac{F \times L^2 \times H}{4} \right)$$

$$d_{3F}^0 = \frac{1}{EI} \times \left(-\frac{F \times L}{2} (H + L) \right)$$

$$d_{11}^0 = \frac{1}{EI} \times \left(\frac{2}{3} L^3 + H \times L^2 \right) + \frac{H}{EA}$$

$$d_{12}^0 = 0$$

$$d_{13}^0 = \frac{1}{EI} \times (-L^2 - L \times H)$$

$$d_{22}^0 = \frac{1}{EI} \times \left(\frac{2}{12} H^3 + \frac{H^2 \times L}{2} \right) + \frac{2L}{EA}$$

$$d_{23}^0 = 0$$

$$d_{33}^0 = \frac{2}{EI} \times (H + L)$$

$$X2 = \frac{F\left(\frac{L \times H^2}{12} + \frac{L^2 H}{4}\right)}{\left(\left(\frac{H^3}{6} + \frac{H^2 L}{2}\right) + \frac{2 \times L \times I}{A}\right)}$$

$$X3 = \frac{\left(\frac{d_{13}^0 \times d_{1F}^0}{d_{11}^0} - d_{3F}^0\right)}{\left(d_{33}^0 - \frac{d_{13}^0{}^2}{d_{11}^0}\right)}$$

$$X1 = -\frac{(X3 \times d_{13}^0 + d_{1F}^0)}{d_{11}^0}$$

- M_{F1}^0 : moment au nœud 1 de la structure isostatique soumise à F
- M_{12}^0 : moment au nœud 2 de la structure isostatique liée au système 1

Le moment fléchissant au nœud i de la structure réelle M_i s'écrit :

$$M_i = M_{Fi}^0 + X1 \times M_{1i}^0 + X2 \times M_{2i}^0 + X3 \times M_{3i}^0$$

Ce calcul permet ainsi de déduire la valeur des moments fléchissant aux quatre coins du cadre hyperstatique. Les moments obtenus montre que les quatre coins sont sollicités avec la même intensité de moment fléchissant. La comparaison avec les valeurs obtenues par le logiciel ROBOT (voir **Figure 1-2**) montre que le calcul RDM est juste et donne ainsi les formules pouvant être utilisées dans un modèle de calcul analytique d'ouverture rectangulaire.

Bien évidemment, à ces moments fléchissant viennent s'ajouter des efforts de compression ou traction dans chaque membrure. Ainsi, pour déterminer la résistance des différentes sections il faut considérer principalement l'interaction M-N. Pour les sections symétriques, on retrouve donc un moment résistant égal dans chaque coin du cadre. Par conséquent, comme les nœuds sont également sollicités, la ruine se produit par la formation simultanée de 4 rotules plastiques aux 4 coins du cadre. Par contre si les sections, comme dans le cas des membrures d'une ouverture dans l'âme d'une poutre, sont dissymétriques, alors l'interaction M-N ne donne pas les mêmes valeurs de moment résistant pour chaque nœud. La ruine est alors précédée par la formation de premières rotules plastiques qui entraine une nouvelle répartition des efforts autour du cadre.

Ainsi, les membrures sont sollicitées par des nouveaux diagrammes de moment fléchissant et d'effort axial. L'étude détaillée du schéma de ruine de ce type de cadre permet de mieux appréhender la valeur de l'effort ultime ou du moins, mieux comprendre la répartition des efforts autour d'une ouverture rectangulaire. L'étude des efforts autour d'une ouverture permet d'affirmer que les deux quarts d'ouverture du côté de faible moment sur la longueur de la poutre ont un moment résistant, réduit par interaction M-N, le plus faible.

Pour schématiser ce comportement, il s'agit donc de supposer la formation de deux rotules dans le cadre d'origine (**Figure 1-1**) aux nœuds 1 et 4. La **Figure 1-4** présente le nouveau cadre ainsi que la nouvelle répartition de moment fléchissant dans les différentes membrures. La suite de l'étude est décrite dans la partie V de ce travail.

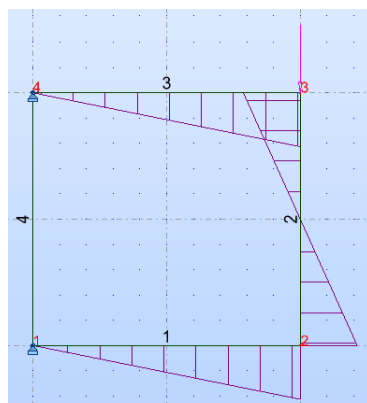


Figure 1-4 Diagramme des moments fléchissant pour le cadre après la formation de deux rotules

ANNEXE F

APPLICATION AUX DEUX AUTRES CONFIGURATIONS DE POUTRES TESTEES

Cette Annexe présente les études numériques du modèle d'ouverture isolée appliqué aux configurations géométriques des poutres testées expérimentalement, AS018 et AS016. L'intérêt de faire une étude avec les deux autres configurations de poutres testées est qu'elles présentent des configurations géométriques intéressantes. En effet, la poutre AS016 a une grande ouverture mettant en avant un schéma de ruine totalement différent de ce qu'il est commun d'observer sur des ouvertures sinusoïdales. Ensuite, la poutre AS018 a pour particularité d'avoir une ouverture très rigide et malgré la présence d'instabilités locales, a une résistance ultime supérieure à la résistance plastique de l'ouverture critique. L'intérêt de cette étude est donc d'étudier si cette résistance importante de cette ouverture est liée à la forme d'ouverture seule ou alors plutôt à une forme de redistribution le long de la poutre. Cependant, seules les configurations géométriques resteront inchangées. En revanche, les deux modèles d'ouverture isolée ont une limite élastique identique, de 460MPa.

Comme pour le modèle d'ouverture isolée étudié en PARTIE V, nous présentons d'une part le diagramme force-déplacement obtenu à l'aide du modèle éléments finis. Puis nous nous intéressons à la distribution de contrainte aux différentes sections critique autour des modèles d'ouverture isolée. Enfin, nous comparons les résultats MEF avec ceux déduits du modèle analytique, en détaillant pour chaque cas, les efforts ultimes analytiques correspondant à la ruine de chaque quart d'ouverture.

1. CONFIGURATION DE LA POUTRE AS018

La modélisation de cette configuration d'ouverture donne un effort ultime numérique $F_{MEF} = 366.6 \text{ kN}$. Le diagramme force-déplacement est donné **Figure 1-1**.

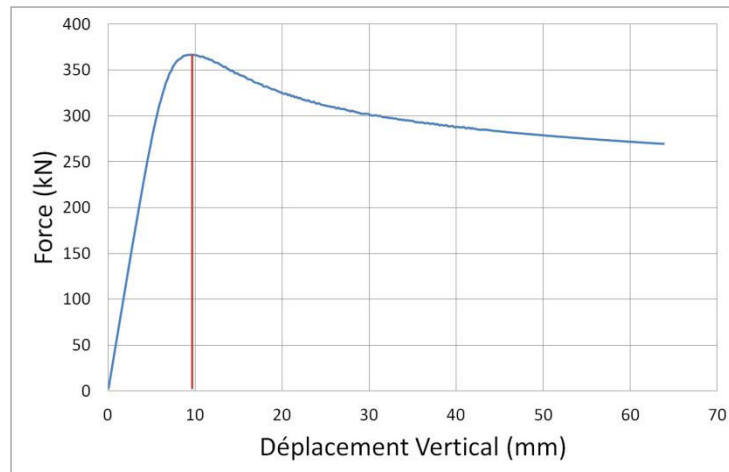


Figure 1-1 Diagramme force-déplacement du modèle d'ouverture seule AS018

Le mode de ruine obtenu correspond à la ruine de l'ouverture. Le modèle analytique final donne une charge ultime de 380.25kN, le modèle analytique a donc un écart d'environ 3.7% avec le modèle MEF. Les diagrammes des figures ci-dessous fournissent l'évolution des contraintes sur les hauteurs des sections critiques des différentes parties de l'ouverture.

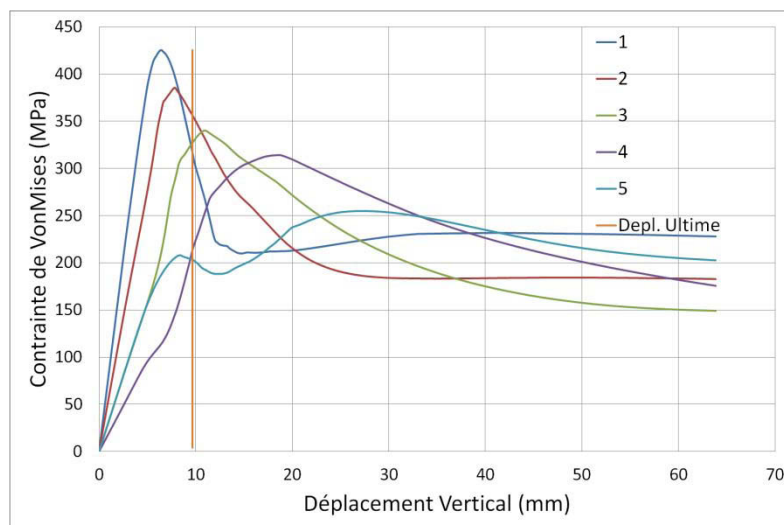


Figure 1-2 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 01

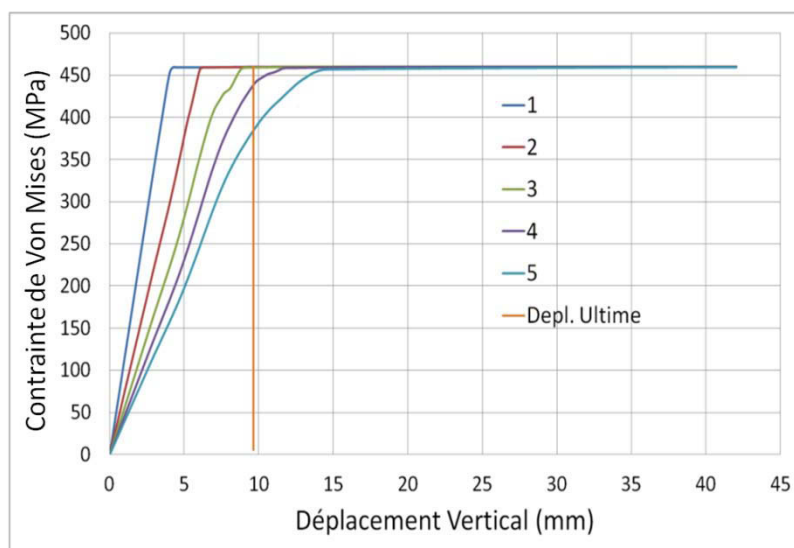


Figure 1-3 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 02

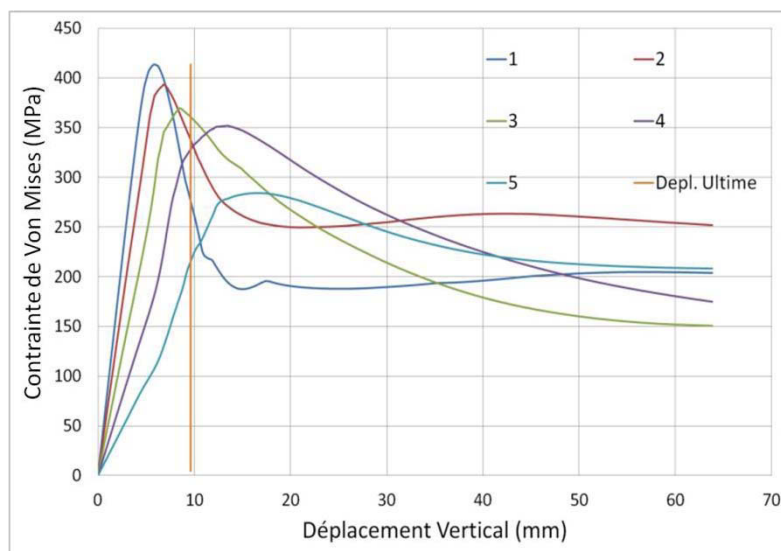


Figure 1-4 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 03

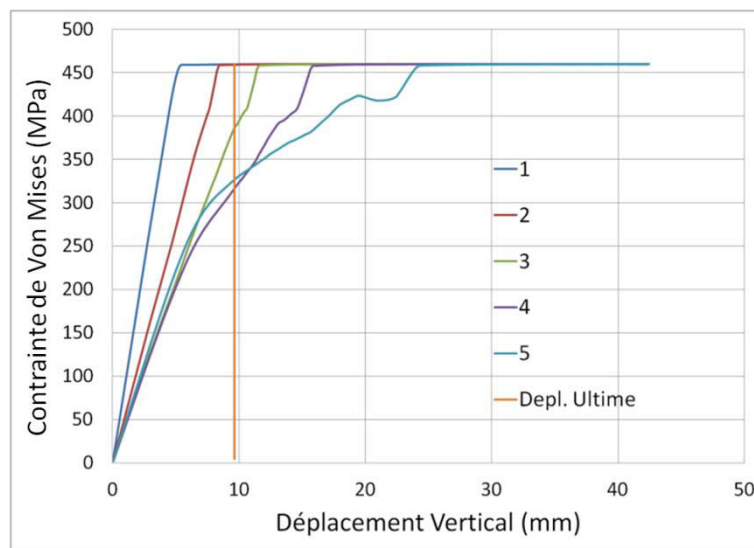


Figure 1-5 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 04

Les diagrammes de contrainte présentés ci-dessus montrent la ruine des quatre quarts d'ouverture. Il peut cependant être observé que la plastification de la section critique du quart d'ouverture 04 semble totale après la ruine de l'ouverture. Cette remarque peut expliquer pourquoi l'effort ultime analytique qui considère la ruine des quatre quarts d'ouverture est dans ce cas insécuroitaire.

	Effort incrémental F_{inc} (kN)	Effort plastique F_{pl} (kN)
Quart 01	250	589
Quart 02	468	468
Quart 03	214	468
Quart 04	589	589

Tableau 1 Résumé des efforts ultimes des différents quarts d'ouverture

Le **Tableau** rappelle les efforts tranchant analytique ultime obtenus pour chaque quart d'ouverture à l'aide du modèle de calcul analytique incrémental développé et avec un simple calcul plastique.

A partir de ces différents résultats, il peut aisément être déduit les différentes valeurs de résistance ultime suivant, le modèle d'ouverture plastique $F_{pl,rect}$, de résistance plastique minimale $F_{pl,min}$ et de résistance incrémentale de l'ouverture $F_{inc,ult}$.

$$F_{pl,rect} = (589 + 468)/2 = 528.5 \text{ kN}$$

$$F_{pl,min} = 468 \text{ kN}$$

$$F_{inc,ult} = (250+468+214+589)/4 = 380 \text{ kN}$$

Il peut cependant être conclu que cette fois, pour cette ouverture petite, l'effort ultime $F_{MEF} = 367 \text{ kN}$, est loin de l'effort plastique de l'ouverture rectangulaire équivalente $F_{pl,rect}$. Il peut clairement être vérifié que le modèle analytique qui combine les efforts déduit de manière incrémentale ($F_{inc,ult}$) est plus juste. De plus cette étude permet de vérifier que si l'effort ultime de poutres cellulaires avec des ouvertures de petite taille étaient égaux ou supérieures à l'effort de plastification de l'ouverture cela venait très certainement d'une capacité de redistribution d'efforts entre ouvertures.

2. AS016

La **Figure 2-1** donne le diagramme force-déplacement dans le cas de l'ouverture de configuration type poutre AS016.

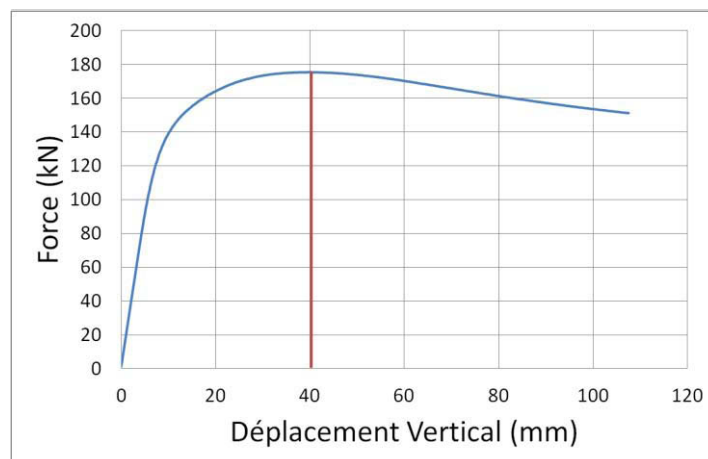


Figure 2-1 Diagramme force-déplacement pour le modèle d'ouverture seule AS016

L'effort ultime obtenu est $F_{MEF} = 175.35 \text{ kN}$. Le tableau ci-dessous détail les efforts ultimes obtenus pour chaque quart d'ouverture.

	$F_{pl} \text{ (kN)}$	$F_{inc.} \text{ (kN)}$
Quart01	193	160
Quart02	176	193

Quart03	176	157
Quart04	193	176

Tableau 2 Résumé des efforts ultimes des différents quarts d'ouverture

L'effort F_{pl} correspond à l'effort plastique de chaque quart d'ouverture et l'effort F_{inc} correspond à l'effort incrémental. A partir de ces différents résultats, il peut aisément être déduit les différentes valeurs de résistance ultime suivant, le modèle d'ouverture plastique $F_{pl,rect}$, de résistance plastique minimale $F_{pl,min}$ et de résistance incrémentale de l'ouverture $F_{inc,ult}$.

$$F_{pl,rect} = (193 + 176)/2 = 184.5 \text{ kN}$$

$$F_{pl,min} = 176 \text{ kN}$$

$$F_{inc,ult} = (160 + 193 + 157 + 176)/4 = 171.5 \text{ kN}$$

Il peut être observé que seul l'effort $F_{inc,ult}$ reste sécuritaire par rapport au modèle numérique ($F_{MEF} = 175 \text{ kN}$). L'effort $F_{pl,min}$ reste malgré tout très proche de la valeur de l'effort ultime et seule l'étude des contraintes autour de l'ouverture permettra de justifier des différentes zones plastifiées de l'ouverture.

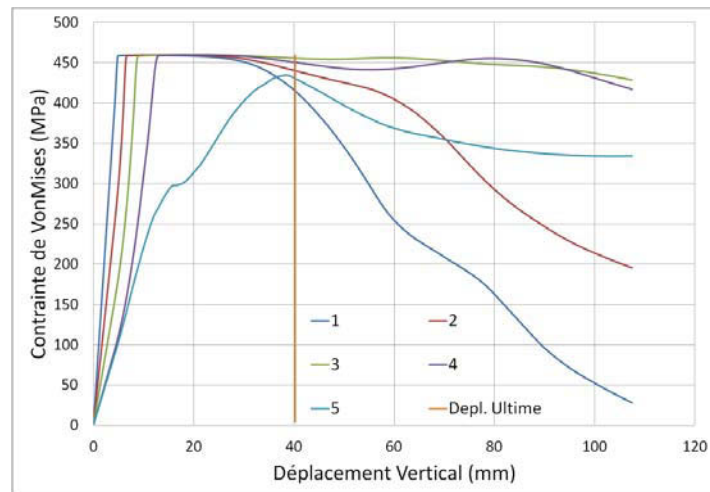


Figure 2-2 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 01

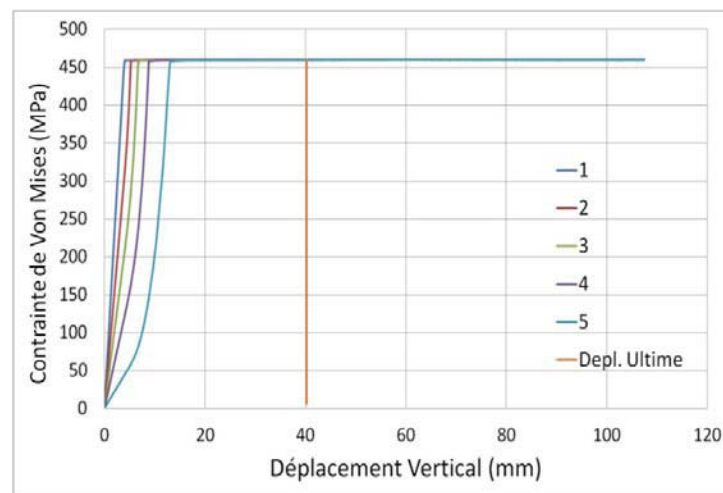


Figure 2-3 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 02

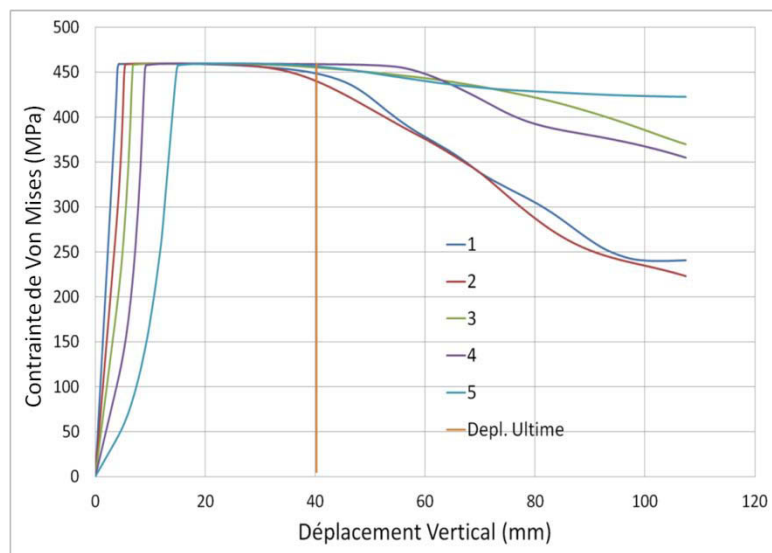


Figure 2-4 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 03

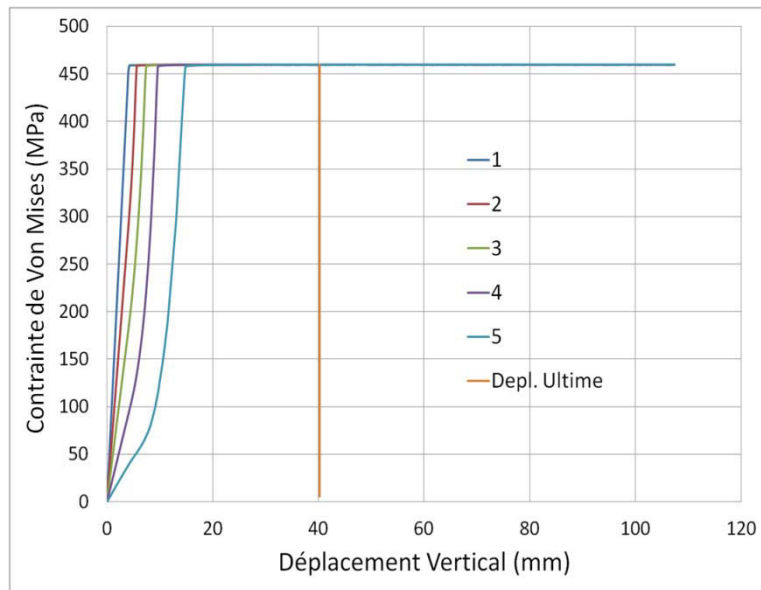


Figure 2-5 Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises sur la section critique du quart 04

Il peut clairement être observé sur ces 4 précédents diagrammes que les quarts d'ouverture 2 et 4 ont largement plastifiés. De plus, les diagrammes des quarts d'ouverture 1 et 3 laissent supposer aussi un comportement très proche de la plastification totale. Seul le quart d'ouverture 1 semble avoir un comportement élasto-plastique mais semble être très proche de la rotule plastique. Par conséquent, il peut être noté que l'effort ultime incrémentale est relativement représentatif de la réalité car il permet d'obtenir un effort ultime proche de l'effort de plastification tout en considérant une résistance élasto-plastique des quarts d'ouverture 1 et 3.

ANNEXE G

METHODOLOGIE DE CALCUL DU QUART D'OUVERTURE D'UNE POUTRE ANGELINA

1. NOTATIONS

b : largeur de la semelle du profilé de base

t_w : épaisseur d'âme du profilé de base

t_f : épaisseur de semelle du profilé de base

r : rayon du congé de raccordement

H_{ini} : hauteur du profilé initial

a_0 : hauteur d'ouverture

l_s : longueur de sinusoïde

w : largeur de montant/longueur de la partie droite de l'ouverture

H_{tot} : hauteur finale de la structure = $H_{ini} + a_0/2$

$h_{t\acute{e}}(x)$: hauteur totale de la section en té étudiée à l'abscisse $x = H_{tot}/2 - y(x)$

h_r : hauteur du congé de raccordement trapézoïdal = $r - t_w/2$

$h_w(x)$: hauteur de l'âme du té fonction de l'abscisse x de la section = $h_{t\acute{e}}(x) - t_f - h_r$

A_f : aire de la semelle = $b \cdot t_f$

A_r : aire du congé trapézoïdal du té = $h_r^2 + h_r \cdot t_w$

$A_w(x)$: aire de l'âme du té fonction de l'abscisse x de la section = $h_w(x) \cdot t_w$

A_{tot} : aire totale du té = $A_f + A_r + A_w(x)$

2. MODELE DE TE ETUDIE ANALYTIQUEMENT :

Le congé de raccordement est considéré trapézoïdal afin de permettre le calcul de la position de l'axe neutre plastique et du moment résistant plastique (voir **Figure 2-1**).

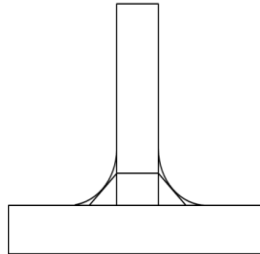


Figure 2-1 : Représentation d'un té avec les tangentes à 45° des congés de raccordement servant à l'approximation.

La forme du congé est déduite directement de la tangente au cercle du congé faisant un angle de 45° avec la semelle. Ainsi la hauteur de ce triangle ne vaut pas « r », mais « $r-tw/2$ ».

Ce document décrit ensuite les calculs effectués pour les caractéristiques géométriques, les résistances plastiques et élastiques et enfin, la vérification des sections le long d'un quart d'ouverture sinusoïdale. Il faut noter que de manière générale, ce modèle a été utilisé pour la vérification du quart d'ouverture du côté de faible moment sur la membrure supérieure d'une poutre cellulaire (**Figure 2-2**).

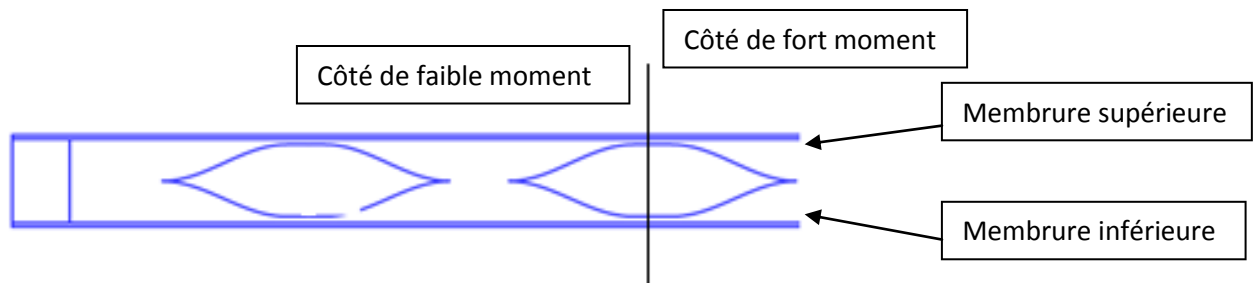


Figure 2-2 : Caractérisation du quart d'ouverture principalement étudié.

3. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES

La **Figure 3-1** décrit les caractéristiques géométriques d'une ouverture sinusoïdale. Elle présente le repère x,y utilisé pour repérer les sections étudiées et déterminer en fonction de la courbe de la sinusoïde $y(x)$, la dimension de chaque section en fonction de leurs abscisses x .

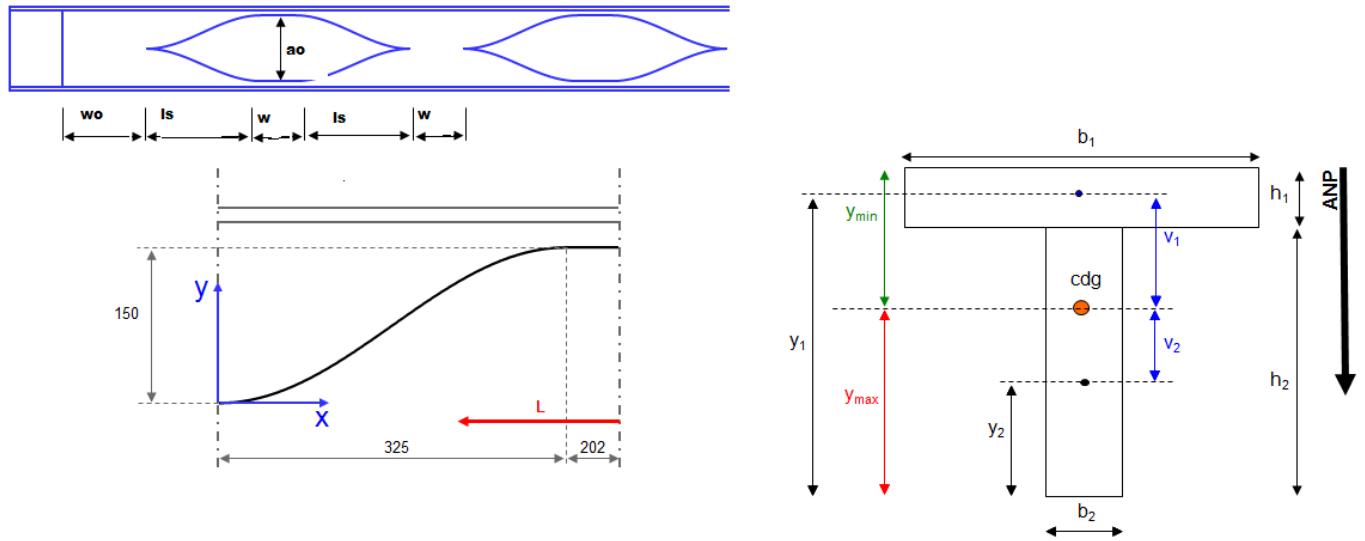


Figure 3-1 : Définition des différents paramètres de calcul

La sinusoïde est décrite par la fonction :

$$y(x) = \frac{a_0}{4} \times \sin\left(\pi \cdot \left(\frac{x}{l_s} + 1.5\right)\right) + \frac{a_0}{4}$$

Ces données nous permettent ensuite d'en déduire la valeur du moment résistant plastique. Un point de détail est donné pour le congé de raccordement considéré comme trapézoïdal et décrit **Figure 3-2**.

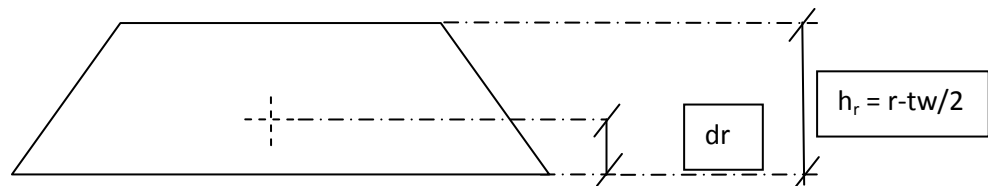


Figure 3-2 : Détail du congé de raccordement

Le centre de gravité du congé de raccordement trapézoïdal est repéré par la dimension « dr » tel que :

$$dr = \left[\left(r - \frac{tw}{2}\right)^2 \times \frac{r - \frac{tw}{2}}{3} + \left(r - \frac{tw}{2}\right) \times tw \times \frac{r - \frac{tw}{2}}{2} \right] / Ar$$

Ensuite on définit trois autres paramètres pour déterminer la position de l'axe neutre plastique dans le cas où celui-ci se situerait dans le congé de raccordement : dr' , dr'' et α tels qu'ils sont définis dans la **Figure 3-3**.

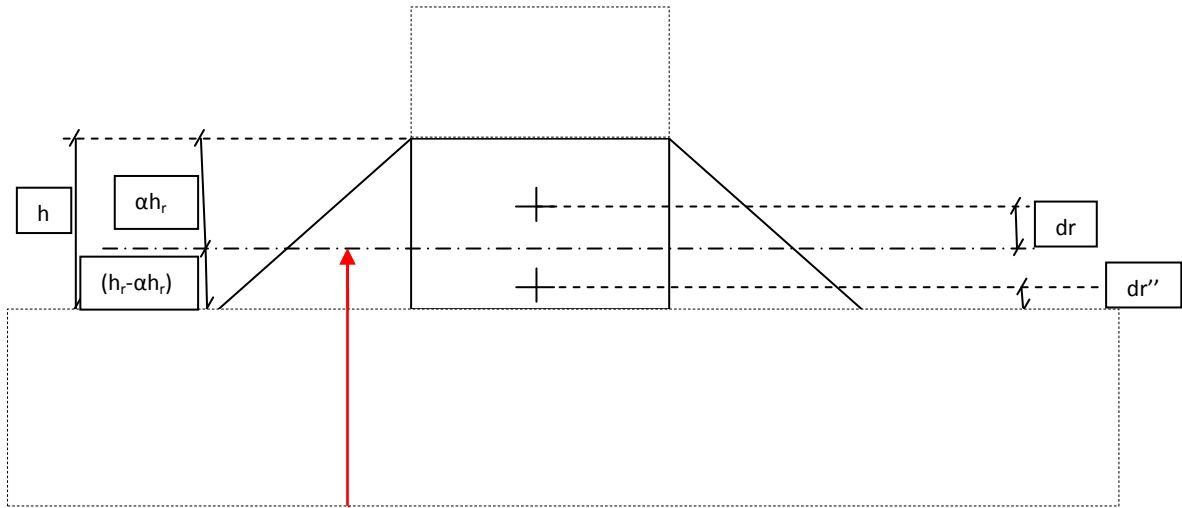


Figure 3-3 : Paramètres utilisés dans le cas d'axe neutre plastique dans le congé de raccordement

Remarque :

h_r : hauteur du congé de raccordement = $r - tw/2$

Avec : r , tw : rayon de congé de raccordement et épaisseur d'âme du profilé de base.

$$dr' = \frac{\left[\alpha^2 \left(r - \frac{tw}{2} \right)^2 \times \alpha \times \frac{r - \frac{tw}{2}}{3} + \alpha \times \left(r - \frac{tw}{2} \right) \times tw \times \alpha \times \frac{r - \frac{tw}{2}}{2} \right]}{\left[\alpha^2 \times (r - tw)^2 + \alpha \left(r - \frac{tw}{2} \right) \times tw \right]}$$

$$dr'' = \frac{\left[(1 - \alpha)^2 \left(r - \frac{tw}{2} \right)^2 \times (1 - \alpha) \times \frac{r - \frac{tw}{2}}{3} + (1 - \alpha) \times \left(r - \frac{tw}{2} \right) \times tw \times (1 - \alpha) \times \frac{r - \frac{tw}{2}}{2} \right]}{\left[(1 - \alpha)^2 \times (r - tw)^2 + (1 - \alpha) \left(r - \frac{tw}{2} \right) \times tw \right]}$$

4. SOLLICITATIONS

Le calcul des efforts qui sollicitent un quart d'ouverture sinusoïdale se fait sur la base des hypothèses décrites en fin de première partie du manuscrit.

La vérification autour d'une ouverture s'effectue au niveau des différents quarts d'ouverture, en discrétisant les efforts globaux dans ces différents quarts, à partir de l'hypothèse du point d'inflexion au droit de l'ouverture. Ainsi, pour une ouverture soumise à un moment global et un effort tranchant global, les efforts se discrétisent tels que décrits par la **Figure 4-1**.

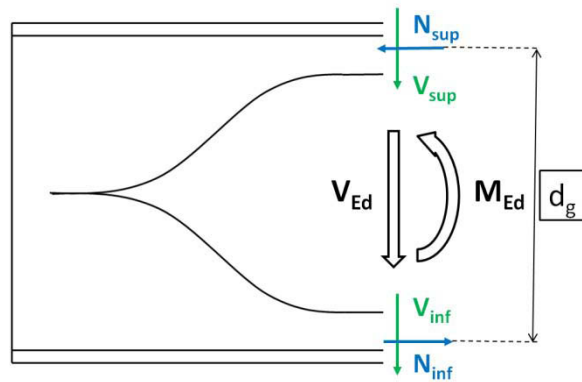


Figure 4-1 : Distribution des efforts globaux au droit d'une ouverture sinusoïdale

Chaque quart d'ouverture est ensuite vérifié en fonction des sollicitations qui lui sont attribuées. La **Figure 4-2** présente l'exemple de sollicitations locales du quart d'ouverture de la membrure supérieure de l'ouverture illustrée **Figure 4-1**.

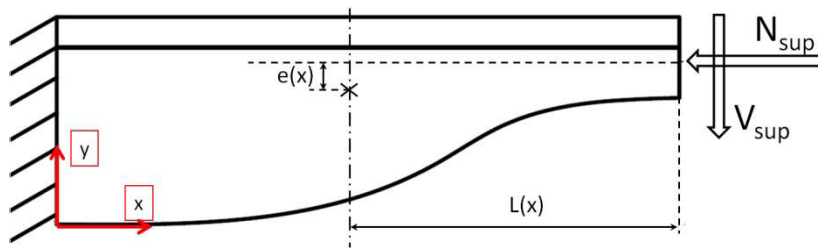


Figure 4-2 : Vérification d'une section en té située à l'abscisse x sur un quart d'ouverture

Chaque section est ainsi sollicitée en flexion composée et la résistance est vérifiée de manière incrémentale, telle que le moment appliqué $M_{V,Ed}$, dans une section en T é donnée, soit inférieur à son moment résistant avec prise en compte de l'effort normal:

$$M_{V,Ed} = V_{sup} \cdot L(x) - N_{sup} \cdot e(x) + q \cdot L(x)^2 / 2$$

$$e(x) = (y_{max0} - y_{max} + y_0 - y)$$

Avec :

- $L(x)$: distance entre le petit Té, situé sur la mi-longueur de l'ouverture, et la section du Té étudié (voir **Figure 4-2**),
- $e(x)$: excentrement de N induit par le changement de position de l'axe neutre élastique entre le petit Té et le Té étudié de position x ,
- q : chargement linéaire sur la longueur du quart d'ouverture [kN/m],
- y_{max} : position du centre de gravité pour le Té étudié (voir **Figure 4-2**),

- $y_{\max 0}$: correspond à y_{\max} du petit Té situé à mi-longueur de l'ouverture ($x = l_s + w/2$),
- y : coordonnée de l'extrémité de l'âme, à l'abscisse considérée (voir **Figure 4-2**),
- y_0 : Valeur de y pour la section du petit à l'extrémité du quart d'ouverture ($x = l_s + w/2$).

L'approche de calcul de résistance retenue dans cette étude s'appuie sur la résistance des sections en Té comme pour les sections circulaires. Pour déterminer la résistance de ces sections, nous effectuons un calcul de classe de section qui nous permet de définir si les sections étudiées sont de résistance plastique ou élastique.

5. CALCUL DE LA RESISTANCE

Ce calcul vise à déterminer la résistance des différentes sections en Té le long d'un quart d'ouverture. Il s'agit donc tout d'abord de déterminer la classe de chaque section en Té afin d'en déduire si l'on considère une résistance plastique, élastique ou une résistance élastique d'une section réduite.

5.1. Interaction M-V

L'interaction avec l'effort tranchant s'effectue en considérant une réduction de l'épaisseur de l'âme au niveau de la hauteur h_2 , correspondant à la hauteur de l'âme plus la hauteur du congé de raccordement (voir **Figure 3-1**). Cette réduction d'épaisseur se fait suivant la formule de l'Eurocode qui calcule une réduction de la limite d'élasticité en fonction du coefficient ρ .

$$f_{y,eff} = (1 - \rho) \times f_y \quad [\text{EC3 -1-1}]$$

$$\rho = \left(\frac{2V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2$$

$$V_{pl,Rd} = \frac{tw \times h_2 + 0.5 \times tf \times (tw + 2 \times r) + 0.5 \times (4 - 3.14) \times r^2 \times f_y}{\sqrt{3} \times \gamma_{M1}}$$

Méthode utilisée :

$$\text{Si } \frac{V}{VRd} < 0.5 : tw_{eff} = tw$$

$$\text{Si } \frac{V}{VRd} > 0.5 : tw_{eff} = (1 - \rho) \times tw$$

Cette réduction d'épaisseur d'âme doit donc être prise en compte dans les calculs de caractéristiques géométriques. Cependant se sont les caractéristiques initiales qui seront utilisées pour la classification des sections.

5.2. Calcul de z_{anp} et $M_{pl,Rd}$ en flexion simple

5.2.1. Si $A_f \geq A_{tot}/2$: z_{ANP} dans la semelle :

$$z_{ANP} = (A_{tot})/(2 \times b)$$

$$M_{Rd} = f_y \times \left\{ A_w \times \left(\frac{hw}{2} + tf + hr \right) + A_r \times (dr + tf) + (tf - z_{ANP}) \times b \right. \\ \left. \times \left[\frac{(tf - z_{ANP})}{2} + z_{ANP} \right] - z_{ANP}^2 \times \frac{b}{2} \right\}$$

5.2.2. Si $A_f + A_r \geq A_{tot}/2$: z_{ANP} dans le congé de raccordement.

$$z_{ANP} = tf + (1 - \alpha(x)) \times hr$$

Dans le cas d'un axe neutre plastique dans le congé de raccordement, on doit déterminer le rapport $\alpha(x)$:

z_{ANP} dans le congé équivaut à : $A_w + k \times A_r = (1 - k) \times A_r + A_f$.

$k(x)$: facteur symbolisant une partie de l'air du congé de raccordement. Comme le congé est trapézoïdal, on obtient la forme ci-dessous :

$$A_w(x) - A_f = -\alpha^2 \times hr^2 - \alpha \times hr \times tw + hr^2 - 2 \times \alpha \times hr^2 + \alpha^2 \times hr^2 + hr \times tw + 2 \\ \times \alpha \times hr^2 - \alpha \times hr \times tw - 2 \times \alpha^2 \times hr^2$$

Ce qui se simplifie en :

$$\alpha^2 \times a + \alpha \times b + c = 0$$

Remarque :

Attention, le coefficient b dans ce cas ne correspond pas à la largeur de semelle, seule les formules surlignées correspondent au cas où b ne représente plus la largeur de semelle.

Avec:

$$a = 2 \times hr^2$$

$$b = 2 \times hr \times tw$$

$$c = Aw(x) - N/fy - Af - hr^2 - hr * tw$$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$. Une valeur de $\Delta < 0$ correspond au cas pour lequel l'axe neutre plastique se situe hors du congé de raccordement.

On résout l'équation du second degré et on obtient : $\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \times a}$

La seconde solution de l'équation n'ayant aucun sens réel.

$$M_{Rd} = fy \times \left\{ A_{weff} \times \left(\frac{hw}{2} + tf + hr \right) + [tw_{eff} \times \alpha \times hr + (\alpha \times hr)^2] \times (dr' + z_{ANP}) - [(2 \times \alpha \times hr + tw_{eff}) \times (1 - \alpha) \times hr + (1 - \alpha)^2 \times hr^2] \times (dr'' + tf) - b \times \frac{tf^2}{2} \right\}$$

5.2.3. Si z_{ANP} dans l'âme :

$$z_{ANP} = \frac{tw \times htot + tf \times tw + hr \times tw - Af - Ar}{(2 \times tw)}$$

$$M_{Rd} = fy * \{ (htot - z_{ANP}) * tw_{eff} * [(htot - z_{ANP})/2 + z_{ANP}] - (dr + tf) * Ar - (z_{ANP} - tf - hr) * tw_{eff} * [(z_{ANP} - tf - hr)/2 + hr + tf] - b * tf^2/2 \}.$$

5.3. Calcul de z_{anp} et $M_{pl,Rd}$ en flexion composée (voir Annexe B)

5.3.1. Si $M_{v,Ed} > 0$:

– Si $Af > Ar + Aw + N/fy$: z_{ANP} dans la semelle :

$$z_{ANP} = \frac{Atot + \frac{N}{fy}}{(2 \times b)}$$

$$M_{Rd} = fy * \left\{ A_{weff} * \left(\frac{hw}{2} + tf + hr \right) + Ar \times (dr + tf) + (tf - z_{ANP}) \times b \times \left[\frac{tf - z_{ANP}}{2} + z_{ANP} \right] - z_{ANP}^2 \times \frac{b}{2} \right\} - N \times y_{min}.$$

– Si $Af + Ar > Aw + N/fy$: z_{ANP} dans le congé de raccordement.

$$z_{ANP} = tf + (1 - \alpha') \times hr$$

$$M_{Rd} = f_y \times \left\{ A w_{eff} \times \left(\frac{h w}{2} + t f + h r \right) + [t w_{eff} \times \alpha' \times h r + (\alpha' \times h r)^2] \times (d r' + z_{ANP}) \right. \\ \left. - [(2 \times \alpha' \times h r + t w_{eff}) \times (1 - \alpha') \times h r + (1 - \alpha')^2 \times h r^2] \times (d r'' + t f) - b \times \frac{t f^2}{2} \right\} + N \times y_{min}.$$

– Si z_{ANP} dans l'âme :

$$z_{ANP} = \frac{t w \times h_{tot} + \frac{N}{f_y} + t f \times t w + h r \times t w - A f - A r}{(2 \times t w)}$$

$$M_{Rd} = f_y \times \left\{ (h_{tot} - z_{ANP}) \times t w_{eff} \times \left[\frac{h_{tot} - z_{ANP}}{2} + z_{ANP} \right] - (d r + t f) \right. \\ \left. \times A r - (z_{ANP} - t f - h r) \times t w_{eff} \times \left[\frac{z_{ANP} - t f - h r}{2} + h r + t f \right] - b \times \frac{t f^2}{2} \right\} + N \times y_{min}.$$

Remarque :

On peut remarquer que l'on a choisit d'utiliser des caractéristiques efficaces pour le calcul de M_{Rd} . En effet ces caractéristiques prennent en considération l'interaction M-V au travers d'une épaisseur réduite d'âme du té en fonction de ρ .

Dans le cas du calcul en flexion composée, on utilise le coefficient α' au lieu de α pour définir la position de l'axe neutre plastique en flexion composée (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Les deux calculs, en flexion simple et flexion composée doivent être effectués ; car ultérieurement on utilisera le module plastique en flexion simple pour les formules en élasto-plastique (partie IV : plaques semi-compactes [EC3-1-3]).

Dans le cas d'un axe neutre plastique dans le congé de raccordement, on doit déterminer le rapport α' .

On rappelle que l'on est dans le cas de $M_{sol} > 0$ (compression des fibres en bord libre). De plus, le signe de N n'influence pas les équations:

z_{ANP} dans le congé équivaut à : $A w + k \cdot A r = (1-k) \cdot A r + A f + N$.

k : facteur symbolisant une partie de l'air du congé de raccordement. Mais comme le congé est trapézoïdal, la forme est quadratique, on a :

$$A w - N / f_y - A f = -\alpha'^2 \cdot h r^2 - \alpha' \cdot h r \cdot t w + h r^2 - 2 \cdot \alpha' \cdot h r^2 + \alpha'^2 \cdot h r^2 + h r \cdot t w + 2 \cdot \alpha' \cdot h r^2 - \alpha' \cdot h r \cdot t w - 2 \cdot \alpha'^2 \cdot h r^2$$

Ce qui se simplifie en :

$$\alpha'^2 a + \alpha' b + c = 0$$

Avec:

$$a = 2hr^2$$

$$b = 2hr \cdot tw$$

$$c = Aw - N/f_y - Af - hr^2 - hr \cdot tw$$

$\Delta = b^2 - 4ac$. Une valeur de $\Delta < 0$ correspond à un axe neutre plastique qui se situe hors du congé de raccordement.

On résout l'équation du second degré et on obtient : $\alpha' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

La seconde solution de l'équation n'ayant aucun sens réel.

5.3.2. Si $M_{v,Ed} < 0$:

Si M_{sol} change de signe, cela implique donc que l'influence de N est opposée au cas précédent. Ainsi les équations sont les mêmes, avec seulement le signe de N qui s'inverse dans les équations.

Ainsi, pour le cas du congé de raccordement on obtient: $c = Aw + N/f_y - Af - hr^2 - h \cdot tw$. Les autres paramètres a et b restent inchangés.

5.4. $M_{pl,Rd,N}$

Le calcul d'interaction est primordial dans le dimensionnement de poutres cellulaires. La discrétisation de la poutre en plusieurs quarts d'ouverture implique une combinaison d'effort qui doit être considérée de la manière la plus rigoureuse possible afin d'éviter d'utiliser des modèles insécuritaires ou au contraire, trop conservatif. Le modèle utilisé se base sur le calcul de l'axe neutre plastique en flexion composée. Une fois l'axe neutre plastique déterminé, on peut aisément en déduire la forme du diagramme correspondant. De cette forme de diagramme on peut calculer la résistance en flexion en fonction de la part induite par l'effort axial.

6. CLASSIFICATION DES SECTIONS

6.1. Classes 1&2

La classification des sections de classe 1 et 2 se fait suivant l'Eurocode 3 partie 1-1 en flexion composée. C'est-à-dire que l'on considère la hauteur d'âme comprimée suivant le diagramme plastique en flexion composée. La position de z_{ANP} amène le calcul de α_{pl} : rapport de la hauteur d'âme comprimée sur la hauteur d'âme totale.

Dans le cas du quart d'ouverture de la **Figure I-27** on a différentes valeurs du coefficient α_{pl} qui définit la hauteur d'âme comprimée pour un diagramme de contrainte plastique.

6.1.1. z_{ANP} dans l'âme :

Si $M_{v,Ed} > 0$:

$$\alpha_{pl} = \frac{(h_{t\acute{e}}(x) - z_{ANP})}{hw(x)}$$

Si $M_{v,Ed} < 0$:

$$\alpha_{pl} = \frac{\left(z_{ANP} - tf - \left(r - \frac{tw}{2}\right)\right)}{hw(x)}$$

6.1.2. z_{ANP} dans la semelle ou congés de raccordement :

- si $M_{v,Ed} > 0$: l'âme de la section en té est entièrement comprimée, $\alpha_{pl} = 1$,
- si $M_{v,Ed} < 0$: l'âme de la section en té est entièrement tendue, $\alpha_{pl} = 0$.

De ce résultat, on en déduit directement la classe de l'âme suivant les critères de classification de l'Eurocode 3 des parois en console.

Remarque :

On peut cependant noter, que dans le cas particulier d'un quart d'ouverture soumis uniquement à traction pure, le critère de classe 2 devient plus favorable que le critère de classe 4 pour les té soumis à flexion composée. Autrement dit, on a :

$c/t < 10 \cdot \epsilon / \alpha$: classe 2

$c/t < 21 \cdot \epsilon \cdot (k_\sigma)^{1/2}$: classe 3.

Hors, dans le cas de sollicitation cité ci-dessus, le rapport α peut descendre à 0,45 ou moins, ce qui implique un critère supérieur à celui pour lequel on est de classe 3. Ainsi si l'on ne respecte pas le critère de classe 2 à un centième près, le modèle en déduit automatiquement une section de classe 4, qui est bien évidemment illogique et beaucoup trop conservatif. Ceci pourrait être une piste d'amélioration des critères de classification.

6.2. Classe 3&4

Si les dimensions de la section en té à l'abscisse x ne vérifie pas les limites de classes 1 et 2, alors il est nécessaire ensuite de vérifier la limite de classe 3.

En revanche, la limite correspondant aux sections de classe 3 se base sur une répartition élastique de contrainte dans la section. La limite de classe 3 en flexion composée pour une paroi à bord libre est : [EC3-1-1]

$$\frac{c}{t} = \frac{hw(x)}{tw} \leq 21 \times \sqrt{k\sigma}$$

Le calcul du coefficient de contrainte critique $k\sigma$ suit les règles de calcul proposée en partie IV de ce manuscrit. En effet, au travers de l'analyse de la contrainte critique d'une plaque en console, nous avons été en mesure de proposer une nouvelle valeur de ce coefficient permettant de mieux tenir compte de la proximité du montant intermédiaire aux sections avec une hauteur d'âme maximale (d'abscisse x minimale sur la **Figure I-27**).

6.3. Calcul de $k\sigma$

Le **tableau 1** renvoi aux équations de la Partie IV du manuscrit.

σ_{\max} au niveau de $y = b$ (bord libre)	$\Psi > -3$	Equation IV-15	
	$\Psi \leq -3$	Maximum :	
		Equation IV-15 avec $\Psi_{\max} = 2,9$	EC3-1-5 tableau 4,2 Figure IV-14
σ_{\max} au niveau de $y = 0$ (appui)	$\Psi \geq 0$	Equation IV-17	
	$0 > \Psi > -0,4$	EC3-1-5 tableau 4,2	

		Figure IV-14
	$\Psi \leq -0,4$	EC3-1-5 tableau 4,2 Figure IV-14 ou Equation IV-19 pour $a/b \leq 0,5$

Tableau 43 Différentes équations à utiliser pour le calcul de $\kappa\sigma$ (voir Partie IV)

Ce tableau permet de définir les différentes formules à utiliser suivant la configuration de chargement de la plaque en console équivalente représentant l'âme de la section en té d'abscisse x (**Figure I-27**).

La valeur de σ_{\max} représente la contrainte maximale de compression (voir **Figure 6-1**).

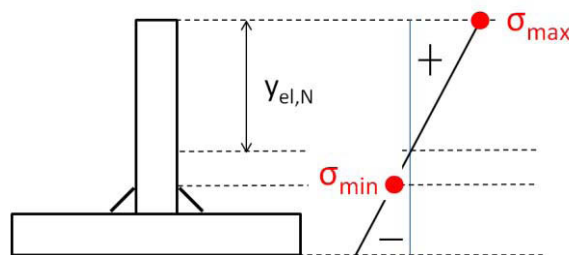


Figure 6-1 : Distribution élastique de contrainte sur la hauteur d'une section en té

Ainsi :

- si $M_{v,Ed} > 0$: σ_{\max} est au niveau du bord libre
- si $M_{v,Ed} < 0$: σ_{\max} est au niveau du bord appuyé (congé de raccordement)

Le calcul du rapport de contrainte sollicitant ψ , on se base sur la répartition élastique de contrainte sur la hauteur d'âme. L'axe neutre élastique est défini tel que :

$$y_{el,N} = y_{max} + I \times \frac{N_{Ed}}{(A_{tot} \times M_{v,Ed})}$$

Si le moment sollicitant est nul alors on pose $y_{el,N} = 0$.

Une fois le calcul effectué, il est possible de vérifier si les sections étudiées sont de classe 3 ou 4. Si les sections sont de classe 3, alors le calcul du moment résistant se fait en considérant une résistance élasto-plastique des sections. Ce calcul se fait par le biais d'une interaction linéaire entre le moment résistant plastique et élastique, en fonction de l'élancement critique de la plaque, lui-même fonction

du coefficient de contrainte critique calculé précédemment par les formules définies au tableau précédent.

Enfin, si les sections sont de classe 4, alors nous effectuons un calcul de section efficace en se basant sur les formules fournies de l'eurocode 3-1-5.

- Si la section est de classe 4 :

$$M_{c,Rd} = W_{eff} f_y / \gamma_{M0}$$

- Si la section est de classe 3 :

$$M_{c,Rd} = f_y (W_{el} + (W_{pl} - W_{el}) 4 (1 - \lambda_p / \lambda_{el}) / \gamma_{M0}$$

Avec pour les parois en console :

$$\lambda_p = \frac{hw(x)/tw}{28,4\epsilon\sqrt{k_\sigma}} \text{ et } \lambda_{el} = 0,748 \text{ (et non pas 0,673 donné dans la partie 1,3 de l'Eurocode 3-1-3).}$$

6.4. Calcul du moment résistant élastique avec le module élastique de la fibre extrême de l'âme du té :

- Si $h_{ceff} = h_c$ alors :

$$M_{elmin} = \min \left(f_y \times \left(W_{elmin} + (W_{pl} - W_{elmin}) \times 4 \times \left(1 - \frac{\lambda_p}{0,748} \right) \right); M_{pl} \right)$$

- Sinon: $M_{elmin} = M_{el,eff}$

Avec : h_c et h_{ceff} , respectivement la hauteur d'âme comprimée et la hauteur efficace d'âme comprimée du té considéré.

6.5. Calcul du moment résistant élastique avec le module élastique de la fibre extrême de la semelle du té :

- Si $h_{ceff} = h_c$ alors :

$$M_{elmin} = \min [M_{pl}; \text{Si} (W_{elmax} > W_{pl}; W_{elmax} * f_y; f_y * (W_{elmax} + (W_{pl} - W_{elmax}) * 4 * (1 - \lambda_p / 0,748))]$$

– Sinon: $M_{elmin}=M_{el,eff}$

7. VERIFICATIONS FINALES

Les vérifications finales s'effectuent uniquement sur la vérification du critère de moment résistant. En effet, la classification des sections se fait en flexion composée. Ainsi, nous calculons le moment résistant plastique de chaque section à l'abscisse x en flexion composée. Pour les sections de classe 1&2, le moment résistant est donc celui calculé tel que définit précédemment. De plus, pour les sections de classe 3 avec un moment résistant (en flexion simple) élasto-plastique égal au moment résistant plastique M_{pl} de la section étudiée, alors celle-ci est aussi considérée comme étant de classe 2.

En revanche, pour les sections de classe 3 et 4, nous calculons le moment résistant élasto-plastique de la section pleine ou de la section efficace, puis nous appliquons une interaction linéaire entre le moment et l'effort axial pour en déduire le moment résistant final, réduit de l'effort axial.

$$M_{Rd} = M_{el,eff} \times \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}\right)$$

Plus précisément :

○ $M_{sol}>0$:

▪ $N>0$:

$$M_{el,Rd,N} = M_{elmin} * (1 - N/N_{Rd})$$

▪ $N<0$:

$$M_{el,Rd,N} = \text{Minimum}[M_{elmin} * (1 - N/N_{Rd}) ; M_{elmax} * (1 + N/N_{Rd})]$$

○ $M_{sol}<0$:

▪ $N>0$:

$$M_{el,Rd,N} = M_{elmin} * (1 + N/N_{Rd})$$

▪ $N<0$:

$$M_{el,Rd,N} = \text{Minimum}[M_{elmin} * (1 + N/N_{Rd}) ; M_{elmax} * (1 - N/N_{Rd})]$$

Ainsi, suivant le signe de N , on peut avoir une résistance à la flexion améliorée.

Il s'agit ensuite de définir la charge ultime de chaque quart d'ouverture de l'ouverture considérée en effectuant ces vérifications pour chaque abscisse sur la longueur du quart d'ouverture. La moyenne de ces charges ultimes permet de définir la charge ultime de l'ouverture sinusoïdale.

8. EXEMPLE D'APPLICATION

8.1. Configuration géométrique et chargement

Nous choisissons de vérifier une poutre cellulaire à ouverture sinusoïdale chargée en flexion 4 points, munie de 8 ouvertures, chargée au niveau des montants intermédiaires entre les ouvertures 3 - 4 et 5 - 6.

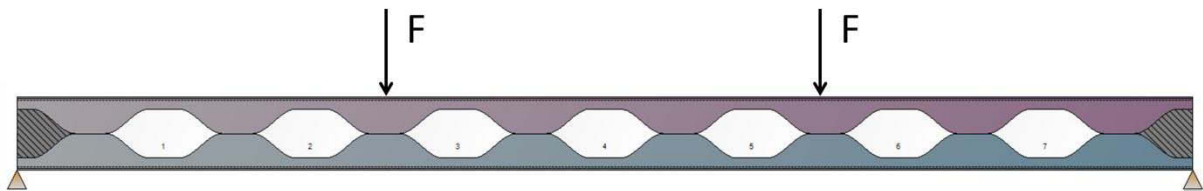


Figure 8-1 : Modèle de poutre étudié analytiquement

Profilé	IPE 500
Nuance d'acier	S 355
Portée de la poutre (m)	12
Hauteur d'ouverture : a_0 (mm)	500
Longueur de sinusoïde l_s (mm)	450
Longueur de la partie droite : w (mm)	300
Longueur du montant initial : w_0 (mm)	900
Nombre d'ouvertures	7
Hauteur finale (mm)	750
excentrement d'ouverture : e (mm)	1500

Tableau 44 Caractéristiques de la poutre étudiée

La poutre est considérée comme maintenue latéralement uniformément, ce qui empêche tout risque de déversement. Etant donné la configuration du chargement, l'ouverture 2 est l'ouverture la plus sollicitée. De ce fait, nous allons présenter uniquement la vérification de cette ouverture.

8.2. Sollicitations au niveau de l'ouverture

$$M_{Ed} = F \times \left(w_0 + 2 \times e + \frac{w}{2} + l_s \right) = 4,5 \times F \text{ [kN.m]}$$

$$V_{Ed} = F \text{ [kN]}$$

$$d_g = H_{tot} - 2 \times y_{min,0} = 702,1 \text{ mm}$$

$$N_{sup} = N_{inf} = \frac{M_{Ed}}{d_g} = 6,41 \times F \text{ [kN]}$$

$$V_{inf} = V_{sup} = \frac{V_{Ed}}{2} = \frac{F}{2} \text{ [kN]}$$

8.3. Etude du quart d'ouverture inférieur droit

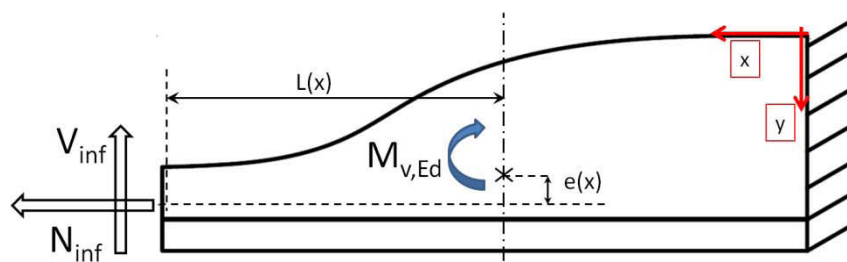


Figure 8-2 : Efforts sollicitant le quart inférieur droit

Afin de fournir un exemple détaillé, nous avons choisit de détailler le calcul pour une section à une abscisse x définie. Bien évidemment, le modèle de calcul doit intégrer un calcul incrémental effectuant la vérification détaillée ci-dessous pour chaque abscisse x de section en Té.

$$x = 100 \text{ mm}$$

$$L(x) = 500 \text{ mm}$$

$$e(x) = y_{min}(x) - y_{min,0} = 93,82 - 23,96 = 69,86 \text{ mm}$$

$$M_{v,Ed} = V_{sup} \times L(x) + N_{sup} \times e(x) = \frac{F}{2} \times 0,5 + 6,41 \times F \times 0,06986 = 0,70 \times F \text{ [kN.m]}$$

8.3.1. Caractéristiques géométriques initiales de la section étudiée

tw	10,2	mm
tf	16	mm
r	21	mm
b	200	mm
h _{té}	345,81	mm
hw	313,91	mm
I : Inertie	80976750,307	mm ⁴
M _{el,Rd}	114,079	kN.m

z_{ANP} en flexion simple	21,750	mm
$M_{pl,Rd}$ en flexion simple	206,099	kN.m

Tableau 45 : Moments résistants en flexion simple pour la section en té étudiée ($x=100m$)

La suite des calculs va dépendre de l'intensité de l'effort appliqué. En effet, cet effort influence la position de l'axe neutre plastique en flexion composée. Par conséquent, pour trouver l'effort ultime, il est nécessaire d'effectuer une procédure incrémentale jusqu'à obtenir la charge pour laquelle une des sections du quart d'ouverture atteint un ratio $M_{v,Ed}/M_{pl,N,Rd} = 1$.

Pour l'exemple ci-dessous, nous avons donc choisit de fixer l'effort appliquer F tel que :

$F = 70$ kN

8.3.2. Résistance plastique en flexion composée

z_{ANP} en flexion composée	135,56	mm
$M_{pl,N,Rd}$	223,624	kN.m
α_{pl}	0,67	
Classe	3	
$y_{el,N}$	142,884	mm
ratio des contraintes sollicitantes : ψ	-1,2	
$k\sigma$	6,42 (au lieu de 0,92)	
Moment résistant élasto-plastique en flexion simple	206,1 (au lieu de 82,42)	kN.m
$M_{pl,N,Rd}$	223,62	kN.m

Tableau 46 : Moments résistants en flexion composée pour la section en té étudiée ($x=100m$)

Nous pouvons constater que le calcul proposé du coefficient de contrainte critique et de moment résistant élasto-plastique permet de largement augmenter le moment résistant de la section étudiée, en atteignant un moment résistant égal au moment plastique.

De plus, nous pouvons constater que l'interaction Moment-Effort axial est favorable et augmente le moment résistant, ce qui correspond à la théorie (voir Annexe B).

Vérification :

$M_{pl,N,Rd}/M_{v,Ed} = 0,44$: La section est vérifiée pour cet effort.

8.3.3. Détail du calcul de $k\sigma$

Il s'agit, à partir de la répartition élastique des contraintes sur la hauteur de la section en té, d'en déduire la contrainte critique d'une plaque rectangulaire équivalente.

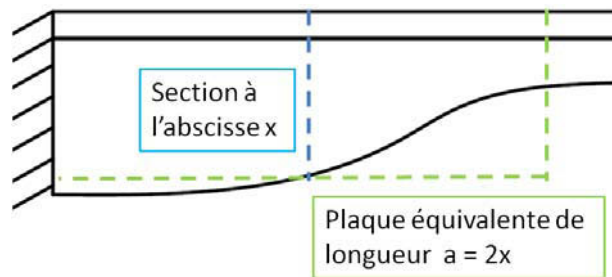


Figure 8-3 : Plaque équivalente de longueur $a = 2x$

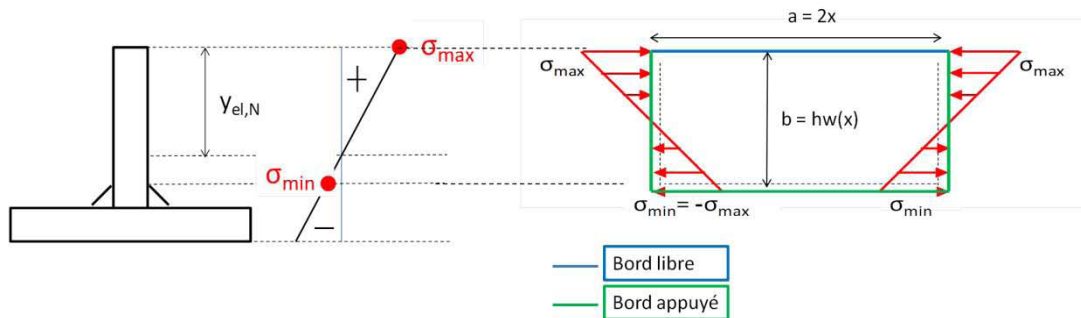


Figure 8-4 : Section en té étudiée à l'abscisse x (a), plaque équivalente étudiée de longueur $a = 2x$

Le calcul de k_σ se fait suivant le tableau précédent. On obtient $k_\sigma = 6,42$ au lieu de 0,92, valeur obtenue en utilisant le tableau 4.2 de l'Eurocode 3 partie 1-5.

8.3.4. Détail du calcul du moment résistant élasto-plastique

$$M_{c,Rd} = \frac{f_y \left(W_{el} + (W_{pl} - W_{el}) 4 \left(1 - \frac{\lambda_p}{\lambda_{el}} \right) \right)}{\gamma_{M0}}$$

$$\lambda_p = \frac{hw(x)/tw}{28,4 \sqrt{k_\sigma}}$$

Si le moment résistant élasto-plastique se retrouve égal au moment plastique, du fait du calcul de k_σ , alors le moment résistant final de la section reprendra le calcul du moment résistant plastique en flexion composée. Sinon, le modèle considère une interaction linéaire entre le moment résistant élasto-plastique $M_{c,Rd}$ et l'effort axial sollicitant N_{inf} .